Ministry of Education and Science of Ukraine
Ivan Franko National University of Lviv
Donetsk National University
Institute of Applied Mathematics and Mechanics
of the National Academy of Sciences of Ukraine

THIRD INTERNATIONAL CONFERENCE

for Young Mathematicians
on Differential Equations and Applications
dedicated to Yaroslav Lopatynsky

3 – 6 November, 2010, Lviv, Ukraine

BOOK OF ABSTRACTS

Donetsk 2010

Third International Conference for Young Mathematicians
on Differential Equations and Applications
dedicated to Yaroslav Lopatynsky

3 – 6 November, 2010, Lviv, Ukraine

CONFERENCE ORGANISERS

– Ministry of Education and Science of Ukraine
– Ivan Franko National University of Lviv
– Donetsk National University
– Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine

PROGRAM COMMITTEE

Yu. M. Berezanskii (Ukraine), V. P. Burskii (Ukraine), Ya. M. Dymarskii (Ukraine), M. L. Gorbachuk (Ukraine), E. Ya. Khruslov (Ukraine), V. A. Ilyin (Russia), M. I. Ivanchov (Ukraine), N. D. Kopachevsky (Ukraine), A. M. Kovalev (Ukraine), A. A. Kovalevskii (Ukraine), M. M. Lavrentyev (Russia), M. M. Malamud (Ukraine), B. Yo. Ptashnyk (Ukraine), F. S. Rofe-Beketov (Ukraine), A. M. Samoilenko (Ukraine), N. N. Uraltseva (Russia), M. Yo. Vishik (Russia), V. S. Vladimirov (Russia), V. P. Shevchenko (Ukraine), V. V. Zharinov (Russia).

ORGANIZING COMMITTEE

M. M. Bokalo, O. M. Buhrii, V. P. Burskii *(co-chairman)*, K. O. Buryachenko, V. M. Fluid, M. I. Ivanchov *(co-chairman)*, N. M. Hryntsiv *(scientific secretary)*, Yu. D. Golovaty, Yu. S. Gorban, Ye. V. Kirichenko, A. A. Kovalevskii, V. M. Kyrylych, D. V. Limanskii, M. M. Malamud, V. N. Tyshlek, M. M. Zarichny.

Contents

ALMOST PERIODIC SOLUTIONS

Syed Abbas
School of Basic Sciences (Section of Mathematics)
Indian Institute of Technology Mandi
Mandi, H.P. – 175001, India
e-mail: sabbas.iitk@gmail.com

In this talk we discuss the existence and uniqueness of almost periodic solutions of various kind of differential equations. By using the theory of semigroup of linear operator we establish the existence and uniqueness of a almost periodic mild solution. We also discuss the existence and significance of almost periodicity in ecological modelling.

1. B.M. Levitan, V. Zhikov, *Almost Periodic Functions and Differential Equations*, Moscow, 1978.
2. A.S. Besicovich, *Almost Periodic Functions*, Dover Publications, New York, 1958.
3. L. Amerio, G. Prouse, *Almost Periodic Functions and Functional Equations*, Van Nostrand-Reinhold, New York, 1971.
4. V.P. Rubanik, *Oscillations of Quasilinear Systems with Retardation*, Nauka, Moscow, 1969.
5. P. Acquistapace, B. Terreni, *A unified approach to abstract linear parabolic equations*, Rend. Sem. Math. Uni. Padova, 1987, **78**, 47–107.
6. P. Acquistapace, *Evolution operators and strong solution of abstract linear parabolic equations*, Differential Integral Equations, 1988, **1**, 433–457.
7. Abbas, S., Bahuguna, D., *Almost periodic solutions of neutral functional differential equations*, Computers and Mathematics with Application, 2008, 55-11, 2593-2601.
8. Abbas, S., Bahuguna, D. *Almost periodic solutions of functional differential equations by monotone iterative method*, Differential Equations and Dynamical Systems, 2008, **16**, Nos. 1 & 2, 47-62.

ON THE COMPLETENESS FOR THE SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Anna V. Agibalova
Donetsk National University,
Donetsk, Ukraine
e-mail: agannette@rambler.ru

We consider in $L^2([0,1];\mathbb{C}^n) := L^2[0,1]\otimes\mathbb{C}^n$ the 2×2 Dirac type system

$$-iBy' + Q(x)y = \lambda y, \quad y = \mathrm{col}(y_1, y_2), \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

where

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \quad \text{and} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12} \\ Q_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{12}(x), Q_{21}(x) \in L_1[0,1]. \tag{2}$$

To the system (1) we attach boundary conditions of the form

$$\begin{aligned} U_1(y) &:= y_1(0) = 0, \\ U_2(y) &:= a_{22}y_2(0) + a_{23}y_1(1) + a_{24}y_2(1) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Theorem. Let $Q_{21}(\cdot) \in C[0,1]$. If $a_{22}a_{23}a_{24} \neq 0$ and $Q_{21}(1) \neq 0$, then the system of root vectors of the problem (1)-(3) is complete in $L_2([0,1];\mathbb{C}^2)$.

The talk is based on joint work with M. M. Malamud and L. L. Oridoroga.

SOLUTION FOR THE FITZHUGH-NAGUMO EQUATION WITH THE VARIATIONAL ITERATION METHOD

Majid Amirfakharian, Somayeh Keighobadi

Islamic Azad University, Tehran Central Branch,

Tehran, Iran

e-mail: m _ amirfakhrian@iauctb.ac.ir, mari _ 20 _ kx@yahoo.com

Recently nonlinear partial differential equations have attracted scientist's attention, which means that this type of equations play an important role in many fields such as biology and physics. In this work we consider the Fitzhugh-Nagumo equation [2], [3], which arises in population genetics [1] and models the transmission of nerve impulses. The Fitzhugh-Nagumo equations were introduced as a simpler model to mimic some key behaviors of Hodgkin-Huxley's equations for squid. For finding the solution of this equation, we employed the variational iteration method. This method was first proposed by He [5], [6] and has been applied for solving linear and nonlinear situations such as Klien-Gordon equation [7], Pantograph equation, Burgers and coupled Burgers equations. M. Tatari et al. worked on the convergence of variational iteration method [4]. The results show that this method converges rapidly to the accurate solution.

1. Aronson D.G., Weinberger H.F., *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*, Adv. Math., **30**, 1978.
2. Dmitrievich Polianin, A., Zaitsev, V. F., *Handbook of nonlinear partial differential equations*, Chapman & Hall/CRC, 2004.
3. Browne, P., Momoniat, E., Mahomed, F.M., *A generalized Fitzhugh-Nagumo equation*, Nonlinear Analysis, **68**, 2008.
4. Tatari M., Dehghan M., *On the convergence of He's variational iteration method*, J. Comput. Appl. Math., **207**, 2007.
5. Dehghan M., Shakeri F., *Numerical solution of a biological population model using He's variational iteration method*, Comput. Math. Appl., **54**, 2007.
6. He J.H., *Variational iteration method-A kind of non-linear analytical technique: Some examples*, Internat. J. Non-Linear Mech., 1999.
7. Yusufoğlu E. *The variational iteration method for studying the Klein-Gordon equation*, Applied Mathematics Letters, **21**, 2008.

SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH ORDER PSEUDOHYPERBOLIC EQUATION WITH NON-CLASSICAL BOUNDARY CONDITIONS

Elvin I. Azizbekov, Yashar T. Mehraliyev
Baku State University, Baku, Azerbaijan
e-mail: azel_azerbaijan@mail.ru

Existence and uniqueness of the classical solution of one-dimensional boundary value problem is proved for a fourth order pseudohyperbolic equation with non-classical boundary conditions.

In the domain $D_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ consider the equation [1]

$$v_{tt}(x,t) - v_{ttxx}(x,t) - v_{xx}(x,t) = a(t)v(x,t) + F(x,t) \tag{1}$$

with boundary conditions

$$v(0,t) - \beta v(1,t) = \rho(t) \quad (0 \le t \le T), \tag{2}$$

$$\int_0^1 v(x,t)dx = \mu(t) \;\; (0 \le t \le T). \tag{3}$$

In D_T we will look for a solution of the equation (1) with conditions (2), (3) satisfying the initial conditions

$$v(x,0) = \Phi(x), \qquad v_t(x,0) = \Psi(x) \quad (0 \le x \le 1). \tag{4}$$

Let $\beta \ne \pm 1$ be a given number, $a(t)$, $F(t,x)$, $\rho(t)$, $\mu(t)$ be given functions, $u(x,t)$ be a desired function.

Here, for $\beta = 0$ we have Ionkin type boundary condition [2].

Definition. Under the classical solution of problem (1)-(4) we understand the function $v(x,t)$, continuous on the closed domain D_T together with all its derivatives contained in equation (1), and satisfying equation (1), conditions (2)-(4) in the ordinary sense.

The following lemma is valid.

Lemma. Let $a(t) \in C[0,T]$, $\mu(t) \in C^2[0,T]$, $F(x,t) \in C(D_T)$ and the following consistory conditions be satisfied:

$$\begin{gathered} \Phi(0) - \beta\Phi(1) = \rho(0), \quad \textstyle\int_0^1 \Phi(x)dx = \mu(0), \\ \Psi(0) - \beta\Psi(1) = \rho'(0), \quad \textstyle\int_0^1 \Psi(x)dx = \mu'(0). \end{gathered} \tag{5}$$

Then the problem on finding the solution of problem (1)-(4) is equivalent to the problem on definition of the function $v(x,t) \in C^2(D_T)$, $v_{ttxx}(x,t) \in C(D_T)$ from (1)-(3) and

$$v_x(1,t) - v_x(0,t) = \gamma(t), \tag{6}$$

where

$$\gamma(t) = [\Phi'(1) - \Phi'(0)]\cos t + [\Psi'(1) - \Psi'(0)]\sin t +$$

$$+\int_0^t \left[\mu''(\tau) - a(\tau)\mu(\tau) - \int_0^1 F(x,\tau)dx\right]\sin(t-\tau)d\tau.$$

The problem (1), (2), (4), (6) is reduced to the problem with homogeneous boundary conditions (2), (6). Indeed, taking into account $\rho(t), \mu(t) \in C^2[0,T]$ and assuming $v(x,t) = u(x,t) + \omega(x,t)$, where $\omega(x,t) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{\beta}{1-\beta}\right)\gamma(t) + \frac{1}{1-\beta}\rho(t)$ for the function $u(x,t) \in C^2(D_T)$, $u_{ttxx}(x,t) \in C(D_T)$ we get the boundary value problem:

$$u_{tt}(x,t) - u_{ttxx}(x,t) - u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \quad ((x,t) \in D_T), \tag{7}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \le x \le 1), \tag{8}$$

$$u(0,t) = \beta v(1,t), \quad u_x(0,t) = u_x(1,t) \quad (0 \le t \le T), \tag{9}$$

where

$$f(x,t) = F(x,t) + a(t)\left(\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{\beta}{1-\beta}\right)\gamma(t) + \frac{1}{1-\beta}\rho(t)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{\beta}{1-\beta}\right)\gamma''(t) - \frac{1}{1-\beta}\rho''(t) + \gamma(t) + \gamma''(t),$$

$$\varphi(x) = \Phi(x) - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{\beta}{1-\beta}\right)\gamma(0) - \frac{1}{1-\beta}\rho(0),$$

$$\psi(x) = \Psi(x) - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{\beta}{1-\beta}\right)\gamma'(0) - \frac{1}{1-\beta}\rho'(0).$$

Further, the existence and uniqueness of the classical solutions of problem (7)-(9) is proved under some conditions on the problem's data.

1. Gabov S.A., Orazov B.B., *On the equation* $\frac{\partial^2}{\partial t}[u_{xx} - u] + u_{xx} = 0$ *and some related problems. Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoy fiziki*, 1986, **26**, №1, 92-102 (in Russian).
2. Ionkin N.I., *Solution of a boundary value problem of heat conductivity theory with non-classical boundary condition*, DU, 1977, **13**, №2, 294-304 (in Russian).

EXISTENCE OF SOLUTIONS AND NUMERICAL TESTS FOR CALOGERO DISCRETE APPROXIMATIONS OF ODEs

Oksana Bihun* **and Mykola Prytula****

* *Concordia College,*
Moorhead, MN, USA
** *Ivan Franko National University of Lviv,*
Lviv, Ukraine
e-mail: * obihun@cord.edu, ** pmm@franko.lviv.ua

In the 1980s, Calogero [5] developed a new method for solving eigenvalue problems with partial differential operators. His scheme was put into a more general projection-algebraic framework by Mitropolski et al. [6], and was further investigated [1]-[4]. We will refer to the combined approach of these researchers to solving a wide range of problems of Mathematical Physics as the Calogero scheme, or *C-scheme*.

We have investigated the question of existence and number of solutions of the discrete approximations of ODEs obtained by means of the C-scheme. In particular, we have looked into the issue of incorporating initial or boundary conditions into the C-scheme.

For one-dimensional case, the Calogero approximations of differential operators are constructed as follows. Let $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ be sufficiently smooth, and denote its Lagrange polynomial by $L(u)(x)=\sum_{i=0}^{n}u(x_i)l_i(x)$, where $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ is a partition of the interval $[a,b]$ and

$$l_i(x)=\frac{\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(x-x_k)}{\prod_{k=0,k\neq i}^{n}(x_i-x_k)}$$

is the standard i-th Lagrange polynomial with respect to this partition, $0\le i\le n$. The fundamental idea of Calogero's method is to approximate any given differential operator A that acts on an appropriate space of functions and is a formal polynomial of the operators $\{1,x,\frac{d}{dx}\}$ by a matrix $\widehat{A}$ such that the multiplication of $\widehat{A}$ by the vector $(u(x_0),u(x_1),\ldots,u(x_n))^T$ leads to a vector of coefficients $\widehat{u}$ satisfying $\sum\limits_{i=0}^{n}\widehat{u}_i l_i(x)=A[L(u)]$.

It is easy to verify that if Z, X, and I are finite dimensional representations of $\frac{d}{dx}$, x, and 1 respectively, then the finite dimensional representation of a formal polynomial $A=P(\frac{d}{dx},x)$ is $P(Z,X)$. Therefore, the C-scheme reduces the differential equation $Au=f$ to the system of linear equations $P(Z,X)v=0$, where $v\in\mathbb{R}^{n+1}$ is the approximation of $(u(x_0),u(x_1),\ldots,u(x_n))^T$.

It is therefore important to investigate the conditions under which solutions to the system $P(Z,X)v=0$ exist and to calculate the number of these solutions.

We proved the following result.

Theorem. Let $P(x,z)=a_k(x)z^k+a_{k+1}(x)z^{k+1}+\ldots+a_m(x)z^m$ be a polynomial of degree m with respect to z, with polynomial coefficients $a_i(x)$, where $k\le i\le m$, such that $a_k(x_p)\neq 0$ for all $p\in\{0,1,\ldots,n\}$. Then $\operatorname{rank} Z=n$, $Z^{n+1}=0$, and $\operatorname{rank} P(X,Z)=n+1-k$.

From the last theorem, it follows that if $P(\frac{d}{dx},x)=\frac{d^2}{dx^2}+1$, then $\operatorname{rank} P(Z,X)=n+1$ and equation $P(Z,X)v=0$ has the unique solution $v=0$. Therefore, to solve the boundary value problem

$$\begin{cases} u''+u=0,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ u(0)=2,u(\frac{\pi}{2})=1,\end{cases}\tag{1}$$

we need to make an appropriate change of variables before applying the C-scheme.

We solved problem (1) using the C-scheme, and computed the error by comparing the approximate solution with the exact solution. We also compared the error of the standard shooting method with the C-scheme error. The results show superiority of the C-scheme and are given in the following table.

Method	n	4	8	12	16
C-scheme	E_n	2.2788e-04	9.5522e-07	3.9033e-09	1.5205e-11
Shooting	E_n	2.71e-02	1.39e-02	9.3e-03	7.0e-03

Table 1. The error $E_n=\sum_{k=0}^{n}|v_k-u(x_k)|$ of the C-scheme and the shooting method for boundary value problem (1), where n is the number of subintervals in the partition of $[0.001,\frac{\pi}{2}]$ for the C-scheme and $[0,\frac{\pi}{2}]$ for the shooting method.

1. Bihun O., *Modification of the Lie-algebraic Scheme and Approximation Error Estimates*, Matematychni Studii, 2003, **20**, №2, 179-184.
2. Bihun O., Luśtyk M., *Numerical tests and theoretical estimations for a Lie-algebraic scheme of discrete approximations*, Visnyk of the Lviv National University. Applied Mathematics and Computer Science Series, 2003, **6**, 22-31.
3. Bihun O., Luśtyk M., *Approximation properties of the Lie-algebraic scheme*, Matematychni Studii, 2003, **20**, №1, 7-14.
4. Bihun O., Prytula M., *The Method of Lie-Algebraic Approximations in the Theory of Dynamical Systems*, Mathematical Bulletin of Shevchenko Scientific Society, 2004, **1**, 24-31. (In Ukrainian)
5. Calogero F., *Interpolation, differentiation and solution of eigenvalue problems in more than one dimension*, Lett. Nuovo Cimento, 1983, **38**, №13, 453-459.
6. Mitropolski Yu.A., Prykarpatsky A.K. and Samoylenko V.H., *A Lie-algebraic scheme of discrete approximations of dynamical systems of mathematical physics*, Ukrainian Math. Journal, 1988, **40**, №4, 453-458.

QUESTIONS OF THE SOLVABILITY OF THE NEUMANN PROBLEM FOR A QUASILINEAR PARABOLIC EQUATION WITH AN ABSORPTION IN THE UNBOUNDED DOMAIN WITH A ZERO THINNING

Olga M. Boldovskaya
Institute of Applied Mathematics and Mechanics
National Academy of Sciences of Ukraine,
Donetsk, Ukraine
e-mail: omboldovskaya@mail.ru

We consider the following Neumann problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(|Du|^{\lambda-1}Du) - u^p, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$|Du|^{\lambda-1}\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \mu, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

where μ is a nonnegative finite Radon measure, $\lambda > 0$, $p > 1$. The unbounded domain $\Omega \subset R^N$, $N \geq 2$ such that

$$\Omega = \{x \in R^N : |x'| < x_N^\beta,\ \beta > 1\}, \quad x' = (x_1, ..., x_{N-1}).$$

The vector $\overrightarrow{n}$ denotes the outer normal to the boundary $\partial\Omega$, $T > 0$.

We say that $u(x,t)$ is a weak solution of the problem (1)-(3), if $u(x,t) \geq 0$ and for all $\tau > 0$ $u(x,t) \in C(0,T; L_{2,loc}(\overline{\Omega})) \cap L_{\infty,loc}(\overline{\Omega} \times (\tau,T)) \cap L_{\lambda+1,loc}(\tau,T; W_{1,\lambda+1,loc}(\Omega))$ and

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (-u\xi_t + |Du|^{\lambda-1}\ Du\ D\xi + u^p\ \xi)\,dx\,dt = 0 \quad \forall\, \xi \in C_1^0(R^N \times (\tau,T));$$

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\Omega} u(x,t)\; X(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} X(x)\,d\mu, \qquad \forall X(x)\in C^0_\infty(R^N).$$

For Radon measure as initial data the existence of a weak solution of the problem (1)-(3) is proved, if

$$\lambda + \frac{\lambda+1}{\beta(N-1)+1} > 1 \quad \text{and} \quad p < \lambda + \frac{\lambda+1}{\beta(N-1)+1}.$$

When initial datum is the Dirac measure centered at the origin the nonexistence result is obtained, if

$$\lambda + \frac{\lambda+1}{\beta(N-1)+1} < 1 \quad \text{or} \quad 1 < \lambda + \frac{\lambda+1}{\beta(N-1)+1} \le p.$$

MATHEMATICAL MODELLING OF HYDRODYNAMICS PROBLEMS WITH PHASE TRANSITIONS

Svetlana B. Boyko and Gennadiy V. Sandrakov
Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Ukraine
e-mail: sandrako@mail.ru

Mathematical and numerical method of direct simulation for some heterogeneous fluid dynamics with take of phase transitions will be presented. It is supposed that the fluids are compressible and inviscid (non-viscous). Heterogeneities of the fluids are considered as small drops or particles of one fluid within other fluid. Total number of the drops can be large enough and the drops may have phase transitions. Thus, simulations of the main fluid (or gas) with small transited drops dynamics are discussed. These are dynamics of multiphase flows really. Therefore it is possible to use general multiphase flow models in the case. But standard multiphase equations are not complete as a rule and various physical experiments are necessary for solving of the problem for concrete heterogeneous fluid dynamics. The situation is more difficult whenever phase transitions are possible.

The presented method is a combination of Harlow's particle-in-cell method and Belotserkovskii's large particles method (see, for example, [1]). The method is based on a discretization of conservation laws for masses, momentums, and energies in integral forms. The discretization is natural and numerical simulations are realized as direct computer experiments for the dynamics of main fluid together with transited drops without use multiphase flows approach. The method seems to be much more adequate to the mechanical and mathematical essence of the dynamics, because conservation laws are correct on the discrete level at least.

The method is designed to numerical modeling of following physical processes. Let us consider graphite drops distributing uniformly in some fluid. More exactly there is medium with graphite particles and the medium may be considered under high pressure as "fluid" with corresponding state equation. Inducing conical shock waves in the heterogeneous medium it was possible to observe phase transitions of the graphite particles in computer experiments by the method. Results of the computer experiments were in agreement with results of physical experiments.

The method is also applicable to computer simulations of plasma dynamics [2]. The plasma may be considered as gas with ionized particles. The gas and particles are defined by state equations. The equations of fluid dynamics are coupled with Maxwell's equations and on a discrete level also. Inducing motions of the heterogeneous plasma in some region, it is possible to observe absorption of the ionized particles on relevant boundaries in computer experiments. The method seems to be perspective for numerical simulations of other absorption and diffusion processes in complex fluid and plasma dynamics.

1. Belotserkovskii O.M., Davydov Yu.M., *The method of large particles in gas dynamics. Numerical experiments*, Moscow, 1982.
2. Boyko S.B., Mischenko V.V., Sandrakov G.V., *The numerical investigation method for evaporated plasma*, J. Computing and Applied Math., 2007, **95**, 3-12.

SOME HYPERBOLIC VARIATIONAL INEQUALITIES WITH VARIABLE EXPONENT OF NONLINEARITY

Oleh M. Buhrii, Ivan Ya. Gurnyak, Oksana T. Panat
Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain, $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$. Let $L^{q(x)}(\Omega)$ be a generalized Lebesgue spaces (see [1]), $V = H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)$, $K \subset V$ be a convex closed set such that $0 \in K$.

We consider the hyperbolic variational inequality

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Bigg[u_{tt}(v-u_t) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i}(v_{x_j} - u_{x_jt}) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i}(v-u_t) +$$

$$+h(x,t)u_t(v-u_t) + c(x,t)u(v-u_t) + g(x,t)|u|^{q(x)-2}u(v-u_t) -$$

$$-f(x,t)(v-u_t)\Bigg]\, dxdt \ge 0, \tag{1}$$

with initial conditions

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

$$u_t(0) = u_1, \tag{3}$$

where $\tau \in (0,T]$, v is a test function.

We seek the solution $u : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^1$ of problem (1)-(3) such that $u \in L^\infty(0,T;V)$, $u_t \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, $u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $u_t(t) \in K$ for a.e. $t \in (0,T)$.

Suppose that the conditions

(A1): $a_{ij} \in L^\infty(Q_{0,T})$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i,j = \overline{1,n})$;

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le a^0 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \quad (a_0 > 0),$$

for every $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ and for a.e. $(x,t) \in Q_{0,T}$;

(B1): $b_1, \dots, b_n \in L^\infty(Q_{0,T})$;

(C1): $c \in L^\infty(Q_{0,T})$, $0 \le c_0 \le c(x,t) \le c^0 < +\infty$ for a.e. $(x,t) \in Q_{0,T}$;

(G1): $g \in L^\infty(Q_{0,T})$;

(H1): $h \in L^\infty(Q_{0,T})$.

hold. If some additional conditions are satisfied, then we prove the existence, uniqueness and some properties of function u .

1. Kovacik O., Rakosnik J. *On space* $L^{p(x)}$ *and* $W^{1,p(x)}$, Czechslovak Math. J., **41 (116)**, 2005, 592-618.

CONDITION OF SOLVABILITY OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR FOURTH ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH NON ZERO RIGHT-HAND SIDE

Kateryna O. Buryachenko
Donetsk National University,
Donetsk, Ukraine
e-mail: katarzyna_@ukr.net

In bounded plane domain Ω with smooth boundary it is considered the Dirichlet problem for the fourth order differential equation without type with right-hand side $f(x) \in H^{m-4}(\Omega)$, $m \ge 4$:

$$L(D_x)\,u = a_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + a_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2} + a_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + a_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3} + a_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = f(x), \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \qquad u'_\nu|_{\partial\Omega} = \psi(x). \tag{2}$$

Here $a_i \in C$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, $\varphi(x) \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $\psi(x) \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, $m \ge 4$, ν – outer normal of $\partial\Omega$.

In the terms of $L-$ traces: $L_{(0)}u$, $L_{(1)}u$, $L_{(2)}u$, $L_{(3)}u$ we formulate necessary condition of solution existence of the problem under consideration. Let us note that analogous questions for second and fourth order equations without type and without right-hand side have been investigated by V. Burskii and E. Buryachenko. The case of fourth order differential equation without type and with right-hand side is considered in first.

EIGENVALUES of $p(t)$-LAPLACIAN DIRICHLET PROBLEM

Bilal Çekiç and Rabil A. Mashiyev
Dicle University, Faculty of Science, Department of Mathematics, Diyarbakir, Turkey
bilalc@dicle.edu.tr & rabilmashiyev@gmail.com

In [1], X.Fan et. al. obtain an interesting result for eigenvalues of the $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}|\nabla u|) = \lambda |u|^{p(x)-2}u \quad \text{in} \quad \Omega,$$
$$u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \tag{1}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$, $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ is a continuous function and $p(x) > 1$ for $x \in \overline{\Omega}$. They show that, in general, $\inf \Lambda = 0$ where Λ is the set of eigenvalues of (1). This is a singular phenomenon, different from the constant exponent case, since $p(x) \equiv p$, $\inf \Lambda = \lambda_1$ is the first eigenvalue which is positive. We give a new simple proof of this result for one-dimensional $p(t)$-Laplacian

$$-(|u'(t)|^{p(t)-2}|u'(t)|)' = \lambda r(t)|u(t)|^{p(t)-2}u(t), \quad t \in (a,b),$$
$$u(a) = u(b) = 0, \tag{2}$$

where λ is a real parameter, $p(t) > 1$ for $t \in [a,b]$, and r is a bounded positive function. Motivated by [2], we also present sharp lower bounds for one-dimensional $p(t)$-Laplacian when $p(t)$ satisfies some conditions. The method of proof is based on a suitable generalization of the Lyapunov inequality to the nonlinear case, and on some elementary inequalities. Our main results are the following theorems.

Theorem 1. Let $p(t)$ be a measurable function such that $1 < p(t) < \infty$ for $t \in [a,b]$. Then $\inf \Lambda \geq 0$.

Theorem 2. Let $p(t)$ be a continuous function such that

$$1 < p^- := \inf_{t\in[a,b]} p(t) \leq p(t) \leq p^+ := \sup_{t\in[a,b]} p(t) < \infty.$$

We assume that $\|f\|_{p(t)} = \|g\|_{p(t)}$ when $\int_a^b |f(t)|^{p(t)}dt = \int_a^b |g(t)|^{p(t)}dt$. Let λ_n be the nth eigenvalue of problem (2). Then,

$$\frac{2n}{C_h \|1\|_{p'(x)} \max\{\|r\|_1^{\frac{1}{p^+}}, \|r\|_1^{\frac{1}{p^-}}\}} \leq \max\{\lambda_n^{\frac{1}{p^+}}, \lambda_n^{\frac{1}{p^-}}\},$$

where $C_h = 1 + \frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+}$.

1. Fan X.L., Zhang Q.H., Zhao D., *Eigenvalues of $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem*, J. Math. Anal. Appl., 2005, **302**, 306-307.
2. Pinasco J.P., *Lower Bounds for eigenvalues of the one-dimensional p-Laplacian*, Abstract and Applied analysis, 2004, 147-153.

ABOUT THE MODEL OF TUBERCULOSIS NATURAL DYNAMIC *

V. Culev [†] **, V. Orlov** [‡] **, V. Pricop** [‡] **, V. Puţuntică** [‡]
[†] *State Medical and Pharmaceutical University "Nicolae Testemiţanu",*
[‡] *Institute of Mathematics and Computer Science, ASM,*
Chişinău, Moldova
e-mail: kusla81@mail.ru, orlovictor@gmail.com, pricopv@mail.ru, vitputuntica@mail.ru

Consider three-dimensional autonomic real differential system

$$\dot{x}= ax + bz + 2gxz, \quad \dot{y}= cy + dz + 2hxz, \quad \dot{z}= ey + fz + 2kxz. \tag{1}$$

Via a translation the system (1) is obtained from differential system which simulating the natural dynamic of tuberculosis [1, p. 219].

By means of determining equations [2-3], we constructed the operators of the widest finite-dimensional Lie algebra, admitted by system (1)

$$\mathcal{X}_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial b} - h\frac{\partial}{\partial h} - k\frac{\partial}{\partial k}, \quad \mathcal{X}_2 = y\frac{\partial}{\partial y} + d\frac{\partial}{\partial d} - e\frac{\partial}{\partial e} + h\frac{\partial}{\partial h},$$

$$\mathcal{X}_3 = z\frac{\partial}{\partial y} + e\frac{\partial}{\partial c} + (f-c)\frac{\partial}{\partial d} - e\frac{\partial}{\partial f} + k\frac{\partial}{\partial h}, \ \mathcal{X}_4 = z\frac{\partial}{\partial z} - b\frac{\partial}{\partial b} - d\frac{\partial}{\partial d} + e\frac{\partial}{\partial e} -$$

$$-g\frac{\partial}{\partial g} - h\frac{\partial}{\partial h}, \ \mathcal{X}_5 = \frac{(b+2gx)z}{e}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2hxz}{e}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{ey+2kxz}{e}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{b(f-a)}{e}\frac{\partial}{\partial b} - d\frac{\partial}{\partial c} +$$

$$+(c-f)\frac{\partial}{\partial e} + d\frac{\partial}{\partial f} + \frac{fg}{e}\frac{\partial}{\partial g} + \frac{(a-c+f)h - dk}{e}\frac{\partial}{\partial h} + \frac{ak}{e}\frac{\partial}{\partial k}, \quad e \neq 0. \tag{2}$$

Theorem 1. The Lie algebra $L_5 = \{\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_5\}$ is isomorphic with Lie algebra $L_5^* = \{\mathcal{Y}_1, ..., \mathcal{Y}_5\}$, where $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_3$, $\mathcal{Y}_2 = \mathcal{X}_4$, $\mathcal{Y}_3 = \mathcal{X}_5$, $\mathcal{Y}_4 = \mathcal{X}_1$, $\mathcal{Y}_5 = \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3$.

Theorem 2. The subalgebra $L_3^* = \{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3\}$ is semisimple and subalgebra $Z = \{\mathcal{Y}_4, \mathcal{Y}_5\}$ is nonzero center of Lie algebra L_5^*.

Theorem 3. The Lie algebra L_5 is a reductive algebra.

Two invariants of system (1) with respect to the Lie algebra L_5

$$I_1 = a + c + f, \quad I_2 = a^2 + c^2 + 2de + f^2$$

were also obtained.

* This research was partially supported by CSŞDT grant Ref. Nr.10.819.08.02F.

1. Avilov K.K., Romanyukha A.A., *Mathematical models of tuberculosis propagation and control.* Mathematical Biology and Bioinformatics (Russia), 2007, **2**, №2, 188-318 (in Russian).
2. Popa M.N., *Applications of algebraic methods to differential systems*, Romania, Piteshty University, The Flower Power Edit., 2004 (in Romanian).
3. Gherştega N.N., *Lie algebras for the three-dimensional differential system and applications*, Abstract of Ph.D. thesis, State University of Moldova, Chişinău, 2007.

METHOD OF BUILDING OF FIRST INTEGRALS FOR AUTONOMOUS LINEAR NONHOMOGENEOUS SYSTEMS IN TOTAL DIFFERENTIALS

S.N. Daranchuk
Yanka Kupala State University of Grodno,
Grodno, Belarus
e-mail: daranchuk@tut.by

The method of partial integrals, wich was developed by V.N. Gorbuzov [1, p. 168-238], formed the basis of creation the methods of constructing the first integrals for different classes of ordinary and multidimensional differential systems. Let's consider the problem of building of integral basis for completely solvable autonomous linear nonhomogeneos total differential system with constant coefficients

$$dz = A(z)\,dt, \tag{1}$$

where $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{C}^m$, $m < n$, $dz = \operatorname{colon}(dz_1, \ldots, dz_n)$, $dt = \operatorname{colon}(dt_1, \ldots, dt_m)$, the elements of $n \times m$-matrix $A(x) = \|a_{ij}(x)\|$ are linear nonhomogeneos functions $a_{ij}\colon z \to \sum\limits_{\xi=1}^{n} a_{ij\xi} z_\xi + a_{ij,n+1}$ $\forall z \in \mathbb{C}^n$ with complex coefficients $a_{ij\tau}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $\tau = \overline{1,n+1}$. The system (1) is completely solvable if and only if the matrices of its coefficients are commutative: $A_j A_\zeta = A_\zeta A_j$, $j = \overline{1,m}$, $\zeta = \overline{1,m}$, where the square block matrices of $(n+1)$-th order $A_j = \|U_j \mathrm{O}\|$, $j = \overline{1,m}$, consist of $(n+1) \times n$-matrices $U_j = \|a_{\tau ji}\|$ ($\tau = \overline{1,n}$ is a column number, $i = \overline{1,n+1}$ is a row number) and $(n+1)$-vector $\mathrm{O} = \operatorname{colon}(0, \ldots, 0)$.

To build the first integrals of completely solvable system (1) the spectral method is developed. It is the alternative to the method from [2]. The first integrals of system (1) are constructed in an explicit form on the base of linear partial integrals (taking into account its multiplicity [1, pp. 193-197]) and conditional partial integrals [1, p. 199].

The linear partial integrals of differential system (1) are found by common eigenvectors of square matrices A_j, $j = \overline{1,m}$, on the base of following rule. A linear nonhomogeneos function $p\colon z \to \nu Z$ $\forall z \in \mathbb{C}^n$ with $Z = (z_1, \ldots, z_n, 1) \in \mathbb{C}^{n+1}$ is a polynomial partial integral of system (1) if and only if the vector $\nu \in \mathbb{C}^{n+1}$ $\big(\nu \neq (0, \ldots, 0, \nu_{n+1})$, $\nu_{n+1} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\big)$ is common eigenvector of matrices A_j, $j = \overline{1,m}$.

The establishment of multiplicity of linear partial integrals and finding of conditional partial integrals for system (1) are realized on the base of adjoined vectors [1, p. 252] of matrices A_j, $j = \overline{1,m}$.

The proposed spectral method for system (1) is in accord with method of building of first integrals and last multipliers for linearly perturbative Jacobi's differential system [3].

1. Gorbuzov V.N. *Integrals of differential systems*, Grodno, 2006 (in Russian).
2. Pauliuchyk P.B. *Integrals of autonomous linear nonhomogeneous system of exact differential equations in complex domain*, Vestnik of Grodno State University. Ser. 2, 2008, №1, 43-49 (in Russian).
3. Gorbuzov V.N., Daranchuk S.N. *Integrals and last multipliers of one class of total differential systems in a complex domain*, Vestnik of Belarussian State University. Ser. 1, 2008, №3, 59-62 (in Russian).

TRANSIENT FREE CONVECTIVE FLOW AROUND AN ISOTHERMAL SEMI-INFINITE VERTICAL PLATE WITH TEMPERATURE GRADIENT DEPENDENT ON HEAT SOURCE AND MASS TRANSFER

Behnaz Farnam
Department of Mathematics, Islamic Azad University-Tehran Branch, Tehran, Iran
e-mail: behnaz_farnam@yahoo.com

Transient free convective flow of an incompressible fluid past an isothermal vertical plate with temperature gradient dependent on heat source and mass transfer is studied. The implicit finite difference scheme which is unconditionally stable has been used to solve governing partial differential equations of the flow. Transient concentration, temperature and velocity profiles are plotted to show the effects of heat source parameter buoyancy ratio force and Schmidt number. Effects of these parameters on Local and Average Skin-friction, Local and Average Nusselt number and Local and Average Sherwood number are demonstrated.

RECOVERING TWO UNKNOWN TERMS IN A LINEAR PARABOLIC EQUATION

Ulyana M. Fedus
Universita' degli studi di Milano,
Department of mathematics "Federiqo Enriques"
Milan, Italy
e-mail: fulka@i.ua

The goal is to recover the unknown function $u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ and the coefficients $z : \Omega \to \mathbb{R}$ and $a_1 : [0,T] \to [0,+\infty]$ in the following parabolic identification problem related to a bounded opened domain Ω in $\mathbb{R}^n$

$$D_t u(t,x) - a_0(t)\mathcal{A}(x,D_x)u(t,x) - a_1(t)u(t,x)$$
$$= a_0(t)f(t)z(x) + g(t,x),\ (t,x) \in [0,T] \times \Omega, \quad (1)$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad Bu(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega, \quad (2)$$
$$\int_0^T \varphi(t)u(t,x)d\mu(t) = h(x),\ x \in \Omega, \qquad \int_\Omega \psi(x)u(t,x)d\mu(x) = k(t),\ t \in [0,T]. \quad (3)$$

Here $a_0 : [0,T] \to [0,+\infty]$, $g : [0,T] \times \Omega \to \Omega$, $f, \varphi, k : [0,T] \to \mathbb{R}$, $h \in \Omega$ are known. Moreover, $\mathcal{A}$, $t \in [0,T]$, denote the following second-order operator in Ω:

$$\mathcal{A} = \sum_{j,k=1}^{d} a_{j,k}(x) D_{x_j} D_{x_k}.$$

We consider the abstract form of the problem (1)-(3)

$$u'(t) - a_0(t)Au(t) - a_1(t)u(t) = a_0(t)f(t)z + g(t),$$

$$u(0)=u_0, \quad \int_0^T \varphi(t)u(t)d\mu(t)=h, \quad \Phi[u(t)]=k(t),\ t\in[0,T],$$

$$(u,a_1,z)-?$$

related to a Banach space X endowed with the norm $\|\cdot\|_X$. and prove an existence, uniqueness and continuous dependence on the data to that problem using Banach theorem about contracting mapping. The cases of different measures in condition (4) are considered. Using semigroup theory ([1]-[4]) we establish that the problem (1)-(3) is correct.

1. Lunardi A., *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser-Verlag-Basel, 1995.
2. Lunardi A., *Interpolation Theory*, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1999.
3. Pazy A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Appl. Math. Sc., Springer-Verlag, 1983.
4. Tanabe H., *On semilinear equations of elliptic and parabolic type*, in: Functional Analysis and Numerical Analysis, H. Fujita ed., Japan Society for the Promotion of Science, 1978, 455-473.

STABILITY ANALYSIS OF NONCONSTANT STATIONARY SOLUTIONS OF A SYSTEM OF A REACTION-DIFFUSION EQUATION COUPLED WITH ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Yuriy D. Golovaty [1], Anna Marciniak-Czochra [2], Mariya B. Ptashnyk [3]

[1] *Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine,*

[2] *IWR, BIOMS, University of Heidelberg, Heidelberg, Germany,*

[3] *Department of Mathematics I, RWTH Aachen University, Aachen, Germany,*

e-mail: yu_holovaty@franko.lviv.ua; ptashnyk@math1.rwth-aachen.de

We study a pattern formation arising in a system of single reaction-diffusion equation coupled with a subsystem of ordinary differential equations

$$\begin{cases} \partial_t c = \dfrac{a_1 b\, c}{c+b} - d_c c + \mu, \\ \partial_t b = \alpha c^2 g - d_b b - \nu b, \\ \partial_t g = \dfrac{1}{\gamma}\,\partial_x^2 g - \alpha c^2 g - d_g g + \dfrac{\beta c}{1+c} + \nu b \end{cases}$$

in rectangle $(0,T)\times(0,1)$ with the initial and boundary conditions

$$c(0,x)=c_0(x), \quad b(0,x)=b_0(x), \quad g(0,x)=g_0(x) \quad \text{for} \quad x\in(0,1),$$

$$\partial_x g(t,0)=\partial_x g(t,1)=0 \quad \text{for} \quad t\in(0,T).$$

All coefficients in the system are assumed to be constant and positive.

Such systems describe the spatially-distributed growth of clonal populations of precancerous cells, which proliferation is controlled by growth factors diffusing in the extracellular medium and binding to the cell surface. Here c denotes the concentration of precancerous cells, which proliferation rate is reduced by cell crowding but enhanced in a paracrine manner by a hypothetical biomolecular growth factor b bound to cells. Free growth factor g is secreted by the cells, then it diffuses among cells with diffusion constant $1/\gamma$, and binds to cell membrane receptors becoming the bound factor b. Then, it dissociates at a rate ν, returning to the b-pool. Parameter μ denotes a small influx of new precancerous cells due to mutation. The model exhibits diffusion-driven instability of spatially homogeneous steady state, which may give rise to the spatially inhomogeneous solutions. We provide conditions of the linearized stability of nonconstant stationary solutions.

NUMERICAL SOLUTION OF ITERATIVE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION BY INTEGRATION METHOD

Erawun Kanoknapa

Kasem Bundit University Suanluang Bangkok 10250 Thailand

e-mail: youremail@mail.ac.th

In [1], M. Podisuk, U. Chandang and W. Sanprasert introduced the multi-step integration method to find the numerical solution of the initial value problem of the ordinary differential equation. W. Sanprasert, U. Chandang and M. Podisuk, in [2], used the integration method with orthogonal polynomials to find the numerical solution of the initial value problem of ordinary differential equation with singular point. In this paper, we use the multi-step integration method, in [1], to find the problem in [2]. The results by computer programming will be illustrated and compare with the results in [2].

HOMOGENIZATION OF EIGENVALUE PROBLEM FOR LAPLACE-BELTRAMI OPERATOR ON RIEMANNIAN MANIFOLD CONSISTING OF TWO DOMAINS CONNECTED BY MANY THIN TUBES

Andrii V. Khrabustovskyi

B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine

e-mail: andry9@ukr.net

Let $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ be a bounded domain, D_i^ε $(i=1,...,N(\varepsilon))$ be a system of balls in Ω depending on small parameter ε. We suppose that the balls are distributed periodically in Ω with period ε, and the radius d^ε of D_i^ε is such that $d^\varepsilon=\overline{o}(\varepsilon)$. We denote $\Omega^\varepsilon=\Omega\setminus\bigcup\limits_i D_i^\varepsilon$ and consider two copies Ω_1^ε and Ω_2^ε of this domain. Let $G_i^\varepsilon=\mathrm{S}^{n-1}\times[0,1]$ $(i=1,...,N(\varepsilon))$ be a set of n-dimensional cylinders (here S^{n-1} is a unit $(n-1)$-sphere). Identifying the boundary of hole D_i^ε on Ω_1^ε and the first component of ∂G_i^ε, and, similarly, identifying the boundary of hole D_i^ε on Ω_2^ε and the second component of ∂G_i^ε, we obtain the manifold

$$M^\varepsilon = \Omega_1^\varepsilon \cup (\underset{i}{\cup} G_i^\varepsilon) \cup \Omega_2^\varepsilon.$$

It consists of two perforated domains Ω_1^ε and Ω_2^ε connected by a number of tubes G_i^ε.

We equip M^ε by the Riemannian metric: on Ω_1^ε and Ω_2^ε it coincides with usual Euclidean metric while on the tubes G_i^ε the metric is defined by the formula

$$ds^2 = (q^\varepsilon dz)^2 + (d^\varepsilon d\Phi)^2,$$

where (z, Φ) are the cylindrical coordinates ($\Phi = (\phi_1, ..., \phi_{n-1})$ are the angle coordinates). We suppose that the length q^ε of G_i^ε and the total volume of G_i^ε are bounded in ε.

We consider the eigenvalue problem for Laplace-Beltrami operator Δ^ε on M^ε:

$$-\Delta^\varepsilon u^\varepsilon = \lambda u^\varepsilon, \qquad u^\varepsilon|_{\partial M^\varepsilon} = 0. \tag{1}$$

Our goal is to describe the behavior of its spectrum as $\varepsilon \to 0$.

We obtain the homogenized spectral problem in Ω whose spectrum is the Hausdorff limit of spectrum of problem (1). Against to the radiuses of D_i^ε and the lengthes of G_i^ε we obtain several (qualitatively different) types of the homogenized problem. The most interesting case is $d^\varepsilon = a\varepsilon^{\frac{n}{n-1}}$, $q^\varepsilon = q$ (a, q – constants) which implies the following

Theorem. *The spectrum of problem (1) converges in the Hausdorff sense to the union of set* $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{(\pi k)^2 q^{-1}\}$ *and spectrum of operator family* $\mathrm{A}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{(\pi k)^2 q^{-1}\}$, *where the operator* $\mathrm{A}(\lambda)$ *acts in* $[L_2(\Omega)]^2$, *it is defined by the operation*

$$\mathrm{A}(\lambda)\mathrm{U} = \begin{pmatrix} -\Delta u_1 + \frac{a^{n-1}\omega_{n-1}\sqrt{\lambda}}{\sin q\sqrt{\lambda}}(u_1 \cos q\sqrt{\lambda} - u_2) - \lambda u_1 \\ -\Delta u_2 + \frac{a^{n-1}\omega_{n-1}\sqrt{\lambda}}{\sin q\sqrt{\lambda}}(u_2 \cos q\sqrt{\lambda} - u_1) - \lambda u_2 \end{pmatrix}, \ \mathrm{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \ \omega_{n-1} = \mathrm{vol}(\mathrm{S}^{n-1})$$

and by the definitional domain $\mathcal{D}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{U} \in [H^2(\Omega)]^2,\ \mathrm{U}|_{\partial\Omega} = 0\}$. *The spectrum of* $\mathrm{A}(\lambda)$ *consists of the eigenvalues* λ_k^n ($k, n \in \mathbb{N}$) *distributed in* $\mathbb{R}^+$ *in the following way:*

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad (\pi(k-1))^2 q^{-1} < \lambda_k^1 \leq \lambda_k^2 \leq ... \leq \lambda_k^n \leq ... \underset{n\to\infty}{\to} (\pi k)^2 q^{-1} < \lambda_{k+1}^1.$$

REMARK ON STRONG SOLUTIONS OF THE NONSTEADY NAVIER-STOKES EQUATIONS IN CONVEX DOMAINS

Petr Kučera
Czech Technical University,
Prague, Czech Republic
e-mail: kucera@mat.fsv.cvut.cz

We prove a theorem on stability of a strong solution of the Navier–Stokes equations with respect to perturbation of the initial velocity in some special norms and also with respect to certain perturbation of the acting body force. The theorem is applied to obtain new results on dynamics of solutions of the Navier–Stokes equations.

1. Kučera P., Neustupa J., *On perturbation of solutions to the Navier-Stokes equations with large initial data and their dynamics*, Nonlinear analysis, 2009, **71**, 2690-2695.

ON DIFFERENTIAL OPERATORS SUBORDINATED TO THE TENSOR PRODUCT OF TWO ELLIPTIC POLYNOMIALS IN $C(\mathbb{R}^n)$

Dmitrii V. Limanskii
Donetsk National University,
Donetsk, Ukraine
e-mail: lim9@telenet.dn.ua

In this communication we consider the description of the linear spaces $L(P)$ of differential operators subordinated to a one fixed differential polynomial in the space $C(\mathbb{R}^n)$, i.e., the description of operators $Q(D)$ satisfying the estimate

$$\|Q(D)f\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\|P(D)f\|_{C(\mathbb{R}^n)} + C_2\|f\|_{C(\mathbb{R}^n)}$$

with positive constants C_1 and C_2 not depending on the choice of $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

As it is well known [1], if $P(D)$ is an elliptic operator of degree l then the basis of the space $L(P)$ is formed by both the monomials $\{D^\alpha\}_{|\alpha|<l}$ and the principal part $P^l(D)$ of $P(D)$. We wonder what is the structure of $L(P)$ if P is not elliptic but it is the product of two elliptic polynomials P_1 and P_2 acting with respect to different variables. We consider the cases when one or two of P_1, P_2 are homogeneous, or non-degenerated and non-homogeneous, or degenerated and non-homogeneous.

1. Limanskii D.V., Malamud M.M., *Elliptic and weakly coercive systems of operators in Sobolev spaces*, Sbornik: Math., 2008, **199**, №11, 1649-1686.

NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST TYPE WITH UNKNOWN SHIFT

V. A. Lukyanenko, M. G. Kozlova, U. A. Hazova
Tavrida National University of Simferopol, Simferopol, Ukraine
e-mail: art-inf@mail.ru

The paper describes a solution for the problems of nonlinear equations of Urison's type

$$Az \equiv \int_a^b a(s)k(t-z(s))ds = u(t), \quad c \leq t \leq d, \tag{1}$$

where functions $a(t), k(t), u(t)$ are given, and $z(s)$ is required. Systems of such equations are considered in problems of distant sounding.

Let $z(s)$ be a monotonically increasing function. The substitution $z(s) = \tau$ in (1) (there is an inverse function) leads to an integral equation of convolution type of first kind [2] where the unknown value is a function $\psi(\tau)$. The solution of an initial integral equation (1) is found from a solution of an ordinary differential equation:

$$\psi(\tau) = a(\varphi(\tau))\varphi'(\tau). \tag{2}$$

In case of a kernel presented in the form of Dirac delta function [1] the function $\psi(\tau)$ from (2) coincides with $u(t)$.

It follows from the delta function property ([2], c. 231) that

$$\int_a^b a(s)\delta(t_j - z(s))ds = \sum_{l=1}^{l_k} \frac{a(s_l^j)}{|\tau'(s_l^j)|}. \tag{3}$$

Using the delta function property it is possible to receive the approximate relationship

$$\int_a^b a(z(s))ds = \int_c^d u(t)dt.$$

Integral relationships of such type connecting required functions and right hand members allow to check accuracy of deriving the approached solution of integral equations (1), to use variation principles for solution construction, and to restore some integral characteristics of a required solution.

Using Fourier's transformation in the equation (1) for the case of a real axis reduces it to a solution of an integral equation

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(s)\exp(i\xi z(s))ds = f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

where $f(\xi) = (\mathcal{F}\{k\}(\xi))^{-1}(\mathcal{F}\{u\}(\xi))$. In the case of a finite function $a(s)$ regularization algorithms using asymptotic methods and Prony's method are applied to these equations.

1. Gahov F.D., Chersky V.I., *Equations of convolution type*, M.: Science, 1978.
2. Tikhonov A.N., Arsenin V.J., *Methods for solving ill-posed problems*, M.: Science, 1979.

THE CAUCHY PROBLEM FOR A QUASILINEAR PARABOLIC EQUATION WITH THE BAOUENDI-GRUSHIN TYPE OPERATOR AND A GRADIENT ABSORPTION

Vera A. Markasheva
Institute of Applied Mathematics and Mechanics
National Academy of Sciences of Ukraine,
Donetsk, Ukraine
e-mail: w9071981@yandex.ru

We consider the solution of the Cauchy problem for the next type of a quasilinear parabolic equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div_L(|D_L u|^{\lambda-1}D_L u) - a(\rho(z))f(t)|D_L u^\nu|^q, \quad (z,t) \in S_T = \mathbb{R}^{N+M} \times (0,T), \tag{1}$$

$$u(z,0) = u_0(z) \in L_1(\mathbb{R}^{M+N}), u_0(z) \geq 0, u_0(z) \not\equiv 0 \text{ a.e.}, \ z = (x,y),\ x \in \mathbb{R}^N,\ y \in \mathbb{R}^M. \tag{2}$$

Here $\lambda > 1$, $1 < q < \lambda + 1$, $\nu q > \lambda$, a $x = (x_1,..,x_N) \in \mathbb{R}^N$, $y = (y_1,..,y_M) \in \mathbb{R}^M$, $N \geq 1$, $M \geq 1$. Assume that for some $\mu : 0 < \mu < (\nu q - \lambda)/\lambda$, functions $f(s), a(s)$ are nonnegative, measurable, continuous, nondecreasing and for all $s > 0$ quantities $s^q/a(s)$ and $s^\mu/f(s)$ don't decrease in addition. Suppose $\alpha > 0$. Symbol $D_L u$ labels vector

$$D_L u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_1}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_2}, \dots, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_M}\right).$$

Function $\rho(z) = \left(|x|^{2(\alpha+1)} + (\alpha+1)^2|y|^2\right)^{1/2(\alpha+1)}$. Here and after $K = Q(\lambda-1)+\lambda+1$, $K_{1+\theta} = Q(\lambda-1)+(\lambda+1)(1+\theta)$, $H = (\lambda+1)(\nu q-1)-q(\lambda-1) > 0$, $Q = N+M(\alpha+1)$. Let $\varphi(s)$ is an inverse function to $a(s)^{\lambda-1}s^H$.

We find the function

$$\omega(s): \quad \omega(s) \equiv \frac{\varphi\left(\frac{t^{\nu q-\lambda}}{f(t)^{\lambda-1}}\right)}{t^{\frac{1}{K}}}, \tag{3}$$

which plays the role of the critical value. More precisely, an asymptotic condition

$$\exists\, C_1 > 0: \quad \exists \lim_{t\to\infty} \omega(t) \le C_1 \tag{4}$$

provides the decay of the total mass of the solution of the problem (1), (2) with $supp\, u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$, and $0 < \alpha < M(\nu q-1)/q$.

If $\exists C_2, \epsilon > 0:\ C_2 t^\epsilon \le \omega(t)$ then we can prove that for all big enough $t > 0$ the total mass of the solution is distant from the zero by some positive constant.

Results were received in cooperation with A.F. Tedeev.

EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR NONUNIFORMLY ELLIPTIC EQUATIONS OF $p(x)$-LAPLACIAN TYPE

Rabil A. Mashiyev [a] **and Mustafa Avci** [a]

[a] *Dicle University, Faculty of Science, Department of Mathematics, Diyarbakir, Turkey*

e-mail: rabilmashiyev@gmail.com & mustafaxavci@hotmail.com

The study of differential equations and variational problems involving the $p(x)$-Laplacian operator, i.e. $\Delta_{p(x)}u := \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)$ has attracted a special interest because of the fact that there are some physical phenomena which can be modelled by such kind of equations, such as elastic mechanics and electrorheological fluids [1, 2].

We discuss the problem

$$-\operatorname{div}(a(x,\nabla u)) = m(x)|u|^{r(x)-2}u + n(x)|u|^{s(x)-2}u \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{\textbf{P}}$$

where Ω is a bounded domain with smooth boundary in $\mathbb{R}^N$, $\operatorname{div}(a(x,\nabla u))$ is a $p(x)$-Laplace type operator, $m \in L^{\beta(x)}(\Omega)$ and $n \in L^{\alpha(x)}(\Omega)$, $m(x) > 0, n(x) > 0$ for $x \in \Omega$, and $\beta, \alpha \in C(\overline{\Omega})$.

We assume that $a(x,\xi): \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ is continuous derivative with respect to ξ of the mapping $A: \Omega\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $A = A(x,\xi)$, i.e. $a(x,\xi) = \nabla_\xi A(x,\xi)$. Moreover, we suppose a and A satisfy the following hypotheses:

(**A1**) the following inequality holds

$$|a(x,\xi)| \le c_0(h_0(x) + |\xi|^{p(x)-1}),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ \text{a.e. } x \in \Omega,$$

where c_0 is a positive real number and h_0 is a nonnegative measurable function on Ω such that $h_0 \in L^{p'(x)}(\Omega)$ for a.e. $x \in \Omega$;

(**A2**) A is $p(x)$-uniformly convex: there exists a constant $k > 0$ such that

$$A\left(x, \frac{\xi+\psi}{2}\right) \le \frac{1}{2}A(x,\xi) + \frac{1}{2}A(x,\psi) - k\,|\xi-\psi|^{p(x)} \quad \forall\, x \in \Omega \quad \forall\, \xi, \psi \in \mathbb{R}^N;$$

(**A3**) $|\xi|^{p(x)} \le a(x,\xi)\cdot\xi \le p(x)\,A(x,\xi)$ $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^N$ and for a.e. $x \in \Omega$;

(**A4**) $A(x,0) = 0$ for all $x \in \Omega$;

(**A5**) $A(x,-\xi) = A(x,\xi)$ for all $\xi \in \mathbb{R}^N$ and for a.e. $x \in \Omega$.

By using the variational methods and a variation of the Mountain Pass lemma and critical point theory, we show the existence of infinitely many weak solutions of problem (**P**).

Theorem 1. *Suppose* $1 < r(x) < p(x) < s(x) < \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ *and the conditions* (**A1**)-(**A4**) *hold. Then the problem* (**P**) *has at least two nontrivial weak solutions in* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Theorem 2. *Suppose the conditions of Theorem 1 hold. If the condition* (**A5**) *satisfies, then the problem* (**P**) *has infinitely many nontrivial weak solutions in* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

1. Fan X. L. and Zhang Q. H., *Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems*, Nonlinear Anal., 2003, **52**, 1843-1852.
2. Mihăilescu M. and Rădulescu V., *On a nonhomogeneous quasilinear eigenvalue problem in Sobolev spaces with variable exponent*, Proceedings Amer. Math. Soc., 2007, **135**, №9, 2929-2937.

DIRECT METHOD OF HOMOGENIZATION OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS INVOLVING BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN PERTURBED DOMAINS

Taras A. Mel'nyk
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
e-mail: melnyk@imath.kiev.ua

There are two different approaches to homogenize optimal control problems. One consists in the passage to the limit in the corresponding adjoint problem and then recover an optimal control problem which is called the homogenized control problem to the initial one (see e.g. [1]). The other one (so-called *direct method*) is based on the theory of Γ-convergence (see [2]) and is more expedient since it keeps convergence of the optimal solutions of the initial problem to the similar characteristics of the corresponding homogenized optimal control problem. The second approach was improved by Z. Denkowski and S. Mortola in [3] using the Kuratovski convergence of solution sets and applying the Buttazzo-Dal Maso abstract scheme [2].

The main assumption in [3] is $G-$ convergence of the sequence operators, which describe the sequence of perturbed boundary-value problems in the concrete case. Therefore, **(1)** the crucial point and the first step in the homogenization of an optimal control problem involving perturbed domains is the proof of the convergence theorem for the state. **(2)** On the second step, with the help of the convergence theorem we get Kuratowskii convergence of solution sets which is equivalent to the $\Gamma-$convergence of the corresponding indicator functions. **(3)** Then we deduce the $\Gamma-$convergence of cost functionals. **(4)** Finally, applying the Buttazzo-Dal Maso abstract scheme, we obtain results for the asymptotic behavior of the optimal solutions, thereby we correctly define the limit optimal control problem, and results for the convergence of minimal values, thereby we prove the stability result of this direct method.

This approach I will demonstrate for the homogenization of an optimal control problem involving thick multi-level junctions with alternate type of controls (see [4]). Also some new our results concerning of the homogenization of a nonlinear optimal control problem will be presented.

1. Kesavan S., Saint Jean Paulin J., *Optimal control on perforated domains*, J. Math. Anal. Appl., 1999, **229**, 563-586.
2. Buttazzo G., Dal Maso G., Γ*-convergence and Optimal Control Problems*, J. Optim. Theory App., 1982, **38**, 385-407.
3. Denkowski Z., Mortola S., *Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations*, J. Optim. Theory App., 1993, **78**, №2, 365-391.
4. Mel'nyk T.A., Durante, T., *Asymptotic analysis of an optimal control problem involving a thick two-level junction with alternate type of controls*, Journal of Optimization Theory and Applications, 2010, **144**, №2, 205-225.

NUMERICAL SOLUTION OF ITERATIVE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION BY INTEGRATION METHOD

Maitree Podisuk

Kasem Bundit University Suanluang Bangkok,
10250, Thailand

e-mail: youremail@mail.ac.th

In [1], A. Pelczar introduced and proved the existence and uniqueness of the second order iterative ordinary differential equations. The proof of the existence and uniqueness theorem of the general equation of iterative ordinary differential equation was given by M. Podisuk in [2]. In [3], M. Podisuk introduced and proved the existence and uniqueness of the simple iterative ordinary differential equations. In [4], M. Podisuk and W. Sanprasert introduced the integration method for finding the numerical solution of the initial value problem of ordinary differential equation with the help of Taylor series expansion. This integration method gives the way of solving for the numerical solution of the iterative ordinary differential equation. However the method of finding the analytical solution of the iterative ordinary differential equation is not known.

$\mathbb{R}$-DIFFERENTIABLE INTEGRALS AND LAST MULTIPLIERS OF MULTIDIMENSIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS

Andrei F. Pranevich
Yanka Kupala State University of Grodno,
Grodno, Belarus
e-mail: pronevich@tut.by

We investigate the problem of the existence of $\mathbb{R}$-differentiable first integrals and last multipliers for a system of total differential equations

$$dw = X_1(z,w)\,dz + X_2(z,w)\,d\overline{z}\,, \quad w \in \mathbb{C}^n, \quad z \in \mathbb{C}^m, \tag{1}$$

where entries of the $n \times m$ matrices $X_1(z,w) = \|X_{\xi j}(z,w)\|$ and $X_2 = \|X_{\xi,m+j}(z,w)\|$ are $\mathbb{R}$-differentiable scalar functions on a domain $G \subset \mathbb{C}^{m+n}$ [1, p. 22].

The notion of an $\mathbb{R}$-differentiable function is consistent with the approach of I.N. Vekua [2] and G.N. Položii [3] in the case of one complex variable. In the case of several complex variables, the theorem of existence and uniqueness of $\mathbb{R}$-holomorphic solution for the completely solvable system (1) was proved in [4]. The spectral method for building first integrals of $\mathbb{R}$-linear differential systems was elaborated [5].

In this paper the necessary conditions and criteria for the existence of $\mathbb{R}$-differentiable integrals and last multipliers are given. In particular, the following statement is valid [6].

Theorem. For the system (1) to have an autonomous $\mathbb{R}$-differentiable last multiplier $\mu\colon w \to \mu(w)$ for all $w \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$ it is necessary that the system of identities

$$W_\chi\big(X^l(z,w), \mathrm{div}X^l(z,w)\big) = 0 \quad \text{for all} \quad (z,w) \in G, \quad l = 1,\dots,2m,$$

be consistent. Here W_χ are the Wronskians with respect to χ (the variable χ ranges over z_j and $\overline{z}_j$, $j = 1,\dots,m$), the vector functions on the domain G

$$X^j\colon (z,w) \to \big(X_{1j}(z,w),\dots,X_{nj}(z,w),\overline{X}_{1,m+j}(z,w),\dots,\overline{X}_{n,m+j}(z,w)\big),$$

$$X^{m+j}\colon (z,w) \to \big(X_{1,m+j}(z,w),\dots,X_{n,m+j}(z,w),\overline{X}_{1j}(z,w),\dots,\overline{X}_{nj}(z,w)\big),\ j=1,\dots,m.$$

1. Shabat B.V., *An introduction to complex analysis*, Part 2, Moscow, 1985.
2. Vekua I.N., *Generalized analytical functions*, Moscow, 1959.
3. Položii G.N., *Generalization of theory of analytic functions of a complex variable*, Kiev, 1965.
4. Gorbuzov V.N., Pranevich A.F., *R-holomorphic solutions and* R*-differentiable integrals of multidimensional differential systems*, Mathematics. Dynamical Systems, 2009 (arXiv: 0909.3245v1 [math.DS]).
5. Gorbuzov V.N., Pranevich A.F., *First integrals of linear differential systems*, Mathematics. Classical Analysis and ODEs, 2008 (arXiv: 0806.4155v1 [math.CA]).
6. Gorbuzov V.N., Pranevich A.F., *Autonomy and cylindricality of* R*-differentiable integrals for systems in total differentials*, J. Differential equations and control processes, 2008, №1, 35-49 (http://www.neva.ru/journal).

RATIONAL-PARAMETRICAL SOLUTIONS TO ALGEBRAIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Pavel F. Pranevich
Yanka Kupala State University of Grodno,
Grodno, Belarus
e-mail: pavelpronevich@gmail.com

Consider the algebraic differential equation [1]

$$\sum_{i=0}^{N} B_i(z) \prod_{j=0}^{l} \left(w^{(j)}\right)^{\nu_{ji}} = 0, \tag{1}$$

where B_i, $i = 0, \ldots, N$, are polynomials of complex variable, ν_{ji} are nonnegative integers such that $\sum\limits_{j=0}^{l} \left|\nu_{ji} - \nu_{jk}\right| \neq 0$, $i, k = 0, \ldots, N$, $i \neq k$. We investigate the problem of establishing connections between an analytic structure of equation (1) and characteristics of asymptotic growth of the equation's parametrical solutions [2]

$$z\colon t \to z(t), \quad w\colon t \to \frac{u(t)}{v(t)} \quad \text{for all} \quad t \in T \subset \mathbf{C}, \tag{2}$$

where z, u, and v are polynomials of complex variable with degrees p, q, and m, respectively.

Using approaches from the monography [1], necessary conditions for existence of parametrical solutions (2) to equation (1) are given in the papers [3, 4].

Theorem. If (p, q, m) is a nonsingular degree of solution (2) to equation (1) such that $p - q \neq sm$, $s = 0, \ldots, \mathfrak{l} - 1$, then the quotient $\dfrac{p-q}{m}$ is a member of the set

$$\left\{ {}^{i}m^{j} \right\}, \quad i, j = 0, \ldots, N, \quad \varkappa_i \neq \varkappa_j,$$

where ${}^{i}m^{j} = \dfrac{\mathfrak{n}_i - \mathfrak{n}_j}{\varkappa_j - \varkappa_i}$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $\varkappa_i \neq \varkappa_j$, $\varkappa_i = \sum\limits_{j=0}^{\mathfrak{l}} \nu_{ji}$, $\mathfrak{n}_i = \deg B_i - \sum\limits_{j=1}^{\mathfrak{l}} j\nu_{ji}$, $i = 0, \ldots, N$. Numbers $0, 1, \ldots, \mathfrak{l} - 1$ must be excluded from the set.

1. Gorbuzov V.N. *Whole solutions to algebraic differential equations*, Grodno, 2006.
2. Gorbuzov V.N. and Gnezdovskij Yu.Yu. *Parametrical solutions to differential equations*, Grodno, 1993.
3. Pranevich P.F. *To a problem of parametrical solutions to algebraic differential equations*, Deponent VINITI of Differential Equations, 27.06.2008, №541-B2008.
4. Pranevich P.F. *To a problem of singular and nonsingular degrees of parametrical solutions to algebraic differential equations*, Some actual problems of modern mathematics and mathematical education. Herzen Readings-2008, St. Petersburg, 2008, 107-111.

HOMOGENIZATION OF QUASILINEAR PARABOLIC PROBLEMS WITH ALTERNATING NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS IN A THICK TWO-LEVEL JUNCTION OF TYPE 3 : 2 : 2

Dmytro Yu. Sadovyj
National Taras Shevchenko Univercity of Kyiv,
Kyiv, Ukraine
e-mail: sadovyj@univ.kiev.ua

We consider a parabolic quasilinear problem in a thick three-dimensional two-level junction Ω_ε which consists of a cylinder and ε-periodically strung thin disks from two different classes depending on their geometric structure and boundary conditions. In addition, the thin disks from different classes are ε-periodically alternated along the lateral surface of the cylinder.

We study the influence of nonlinear boundary conditions given on the boundaries of the thin disks on the asymptotic behavior of the solution as $\varepsilon \to 0$, i.e., when the number of the thin disks infinitely increases, whereas their thickness tends to zero. The results are obtained jointly with T.A. Mel'nyk.

THE Ya. LOPATYNSKY AND I. SKRYPNIK DIFFERENTIAL-GEOMETRIC WORKS ON A GENERALIZED de-RHAM-HODGE TYPE THEORY OF DIFFERENTIAL COMPLEXES

Anatoliy M. Samoilenko [a)] **and Anatoliy K. Prykarpatsky** [b)]
a) Institute of Mathematics at the National Academy of Scinces, Kyiv, Ukraine
e-mail: sam@imath.kiev.ua
b) Ivan Franko State Pedagogical University,
Drohobych, Lviv region, Ukraine,
and the AGH University of Science and Technology, Kraków, Poland
e-mail: pryk.anat@ua.fm

We present a review on spectral and differential-geometric properties of Delsarte transmutation operators in multi-dimension, based on a generalized de Rham-Hodge type theory of differential complexes first devised by Ya. Lopatynsky [1] and I. Skrypnik [2, 3, 4, 5] in 60-th of the past century and recently developed in works [6, 7]. Some applications of the suggested theory to integrable dynamical systems theory in multi-dimension are presented.

1. Lopatynski Y.B., *On harmonic fields on Riemannian manifolds*, Ukr. Math. Journal, **2** (1950), 56-60 (in Russian).
2. Skrypnik I.V., *A harmonique fields with peculiarities*, Ukr. Math. Journal, **17 (4)** (1965), 130-133 (in Russian).
3. Skrypnik I.V., *Periods of A-closed forms*, Proceedings of the USSR Academy of Sciences, **160 (4)** (1965), 772-773 (in Russian).
4. Skrypnik I.V., *The generalized De Rham theorem*, Proc. UkrSSR Acad. Sci., **1** (1965), 18-19 (in Ukrainian).

5. Skrypnik I.V., *The A-harmonic forms on a compact Riemannian space*, Proc. UkrSSR Acad. Sci., **2** (1965), 174-175 (in Ukrainian).
6. Samoilenko A.M., Prykarpatsky Y.A. and Prykarpatsky A.K., *The spectral and differential geometric aspects of a generalized de Rham-Hodge theory related with Delsarte transmutation operators in multidimension and its applications to spectral and soliton problems*, Nonlinear Analysis **65** (2006) 395-432.
7. Bogolyubov N.N. (Jr.), Prykarpatsky Ya.A., Samoilenko A.M. and Prykarpatsky A.K., *Generalized de Rham-Hodge Theory of Multidimensional Delsarte Transmutations of Differential Operators and Its Applications for Nonlinear Dynamic Systems*, Physics of Particles and Nuclei **36**, Suppl. 1, 2005, 111-122.

ASYMPTOTIC SOLITON TYPE SOLUTION TO KORTEWEG-DE VRIES EQUATION

Valeriy Hr. Samoylenko, Yuliya I. Samoylenko
Kyiv National Taras Shevchenko University,
Kyiv, Ukraine
e-mail: vsam@univ.kiev.ua, yusam@univ.kiev.ua

As it is well known Korteweg-de Vries equaiton [1] is fundamental one of modern physics and mathematics, in particular the equation can be used for simulation different processes in hydrodynamics, solid body theory, plasma theory, etc. For studying Korteweg-de Vries equation with variable coefficients asymptotic methods are used [3].

We study equation with variable coefficients [4]

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x, \tag{1}$$

where

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k a_k(x,t), \quad b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k b_k(x,t), \tag{2}$$

functions $a_k(x,t)$, $b_k(x,t) \in C^\infty(\mathbf{R} \times [0,T])$, $k \geq 0$, $T > 0$.

The algorithm of constructing asymptotic soliton type solutions to (1) is proposed. Asymptotic soliton type solution to (1) is searched in the form

$$u(x,t,\varepsilon) = Y_N(x,t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}),$$

where

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)\right], \quad \tau = \frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon},$$

N is arbitrary natural number.

1. Korteweg D.J., de Vries G., *On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves*, Philos. Mag., 1895, №39, 422-433.

2. Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M., *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*, Phys. Rev. Lett., 1967, **19**, 1095.
3. Maslov V.P., Omel'yanov G.A. *Geometric asymptotics for PDE. I.*, Providence: American Math. Society, 2001.
4. Samoylenko V.Hr., Samoylenko Yu.I., *Asymptotic expansions for one phase soliton type solutions to Korteweg-de Vries equation with variable coefficients*, Ukrainian Math. Journ., 2005, **58**, №1, 111-124.

ABOUT SOME PROPERTIES OF SOLUTIONS FOR HIGHER ORDER PARABOLIC EQUATIONS OF DIFFUSION-CONVECTION TYPE

Dmitry A. Sapronov
Donetsk national university,
Donetsk, Ukraine

In the domain $G_T = (0,T) \times R^n$, $n > 1$, we investigate the Cauchy problem for a class of higher-order parabolic equations. The problem has the form

$$u_t + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha (|D_x^\alpha u|^{p-1} D_x^\alpha u) + (|u|^{\lambda-1}u)_{x_1} = 0, \quad p > 1, \quad \lambda > 1, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \in L_{2,loc}(R^n), \quad \operatorname{supp} u_0 \subset \{(x_1, x') \in R^n : x_1 \geq \Lambda_1 |x'|\}, \quad |\Lambda_1| < \infty. \tag{2}$$

We establish anisotropic conditions on the growth of $u_0(x)$ when $|x| \to \infty$, which guarantee the solvability of problem (1)-(2). Additionally, upper estimates of the speed of propagation of solution's support, depending on behavior of $u_0(x)$ at $|x| \to \infty$ and geometry of $\operatorname{supp} u_0(x)$, are obtained.

ON THE LARGE TIME CONCENTRATION OF ENERGY IN SOLUTIONS TO THE NAVIER-STOKES EQUATIONS IN THE WHOLE 3D SPACE

Zdenek Skalak
Czech Technical University,
Prague, Czech Republic
e-mail: skalak@mat.fsv.cvut.cz

Let w be a global weak solution to the Navier-Stokes equations satisfying the strong energy inequality and $0 \leq \alpha \leq \beta < \infty$. Then there exist $C = C(\alpha, \beta) > 1$, $\delta_0 = \delta_0(\alpha, \beta) \in (0,1)$ and $t_0 = t_0(\alpha, \beta) > 0$ such that

$$\frac{||A^\beta w(t)||}{||A^\alpha w(t+\delta)||} \leq C \tag{1}$$

for every $t \geq t_0$ and every $\delta \in [0, \delta_0]$. Here A denotes the Stokes operator and A^β are its powers. We further derive the following consequence of (1):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{\mathbf{R}^3 \setminus B_{\sqrt{a+\varepsilon}}(0)} |\xi|^{4\alpha} |F(w(t))(\xi)|^2 \, d\xi}{\int_{\mathbf{R}^3} |F(w(t))(\xi)|^2 \, d\xi} = 0,$$

where $a = \lim\limits_{t\to\infty} ||A^{1/2}w(t)||^2/||w(t)||^2$, F denotes the Fourier transform and ε is an arbitrary positive number.

1. Schonbek M.E., Wiegner M., *On the decay of higher-order norms of the solutions of Navier-Stokes equations*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1996, **126A**, 677-685.
2. Skalak Z., *On asymptotic dynamics of solutions of the homogeneous Navier-Stokes equations*, Nonlinear Analysis, 2007, **67**, 981-1004.
3. Skalak Z., *Asymptotic energy and enstrophy concentration in solutions to the Navier-Stokes equations in* $\mathbf{R}^3$ (http://mat.fsv.cvut.cz/nales/preprints/).
4. Skalak Z., *Large time behavior of energy in exponentially decreasing solutions of the Navier-Stokes equations*, Nonlinear Analysis, 2009, **71**, 593-603.

ON THE UNIQUENESS AND NONEXISTENCE OF POSITIVE WEAK SOLUTIONS FOR NONLINEAR MULTIPARAMETER ELLIPTIC SYSTEMS INVOLVING THE (p,q)-LAPLACIAN

Sayyed H. Rasouli
Babol University of Technology,
Babol, Iran
e-mail: s.h.rasouli@nit.ac.ir

The paper deal with the uniqueness and nonexistence of positive weak solutions for a nonlinear multiparameter elliptic system. We are motivated by the paper of Hai [1]. In [2], authors establish an existence result for the system via the method of sub-and supersolutions. Here we focus on further extending the study in [1, 2].

1. Hai D.D., *Existence and uniqueness of solutions for quasilinear elliptic systems*, Proc. Amer. Math., 2004, **133**, №1, 223-228.
2. Ali J., Shivaji R., *Positive solutions for a class of p-laplacian systems with multiple parameters*, Jour. Math. Anal. Appl., 2007, **335**, 1013-1019.

PERIODIC SOLUTIONS OF SOME PLANAR NONAUTOMOMOUS ODES

Pawel Wilczynski
Jagiellonian University,
Cracow, Poland
e-mail: pawel.wilczynski@uj.edu.pl

Our goal is to discuss the existence of periodic solutions of ODEs (in complex number notation)

$$\dot{z} = v(t,z) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t) z^j + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(t) \overline{z}^j,$$

where $n \geq 2$ and all a_j, b_j are continuous and T-periodic. We are also show that some of the periodic solutions are asymptotically stable or unstable.

If the dominating term of the vector field v is of the type $\overline{z}^m$, then the existence of periodic solutions can be established with the method of isolating segments (see [1]). The equations with periodic solutions are in some sense generic in this class of equations.

If the dominating term is of the type z^n, then the situation is much more difficult. There are known examples of such equations where there are no periodic solutions (e.g. [4-5]).

In the holomorphic case (i.e. $b_j \equiv 0$ for every j) the existence of periodic solutions may be obtained in some special situations (e.g. [2-3]). In most cases we find them in special sectors of the complex plain. Moreover, by the holomorphicity we can detect solutions which are asymptotically stable or unstable.

In our speech we allow nonzero b_j's, what can spoil the sectors. But even if the sectors survive, we lose holomorphicity and additional information about stability of solutions. We show how to gain this information from geometrical properties of the vector field v.

1. Roman Srzednicki. *On periodic solutions of planar polynomial differential equations with periodic coefficients.*, J. Differential Equations, 1994, **114**, №1, 77–100.
2. Paweł Wilczyński. *Planar nonautonomous polynomial equations: the Riccati equation.*, J. Differential Equations, 2008, **244**, №6, 1304–1328.
3. Paweł Wilczyński. *Planar nonautonomous polynomial equations. II. Coinciding sectors.*, J. Differential Equations, 2009, **246**, №7, 2762–2787.
4. Henryk Żołądek. *The method of holomorphic foliations in planar periodic systems: the case of Riccati equations.*, J. Differential Equations, 2000, **165**, №1, 143–173.
5. Henryk Żołądek. *Periodic planar systems without periodic solutions.*, Qual. Theory Dyn. Syst., 2001, **2**, №1, 45–60.

ПРО ПОБУДОВУ РОБАСТНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

А.М. Алілуйко, В.О. Єрьоменко

Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна

e-mail: aliluyko@imath.kiev.ua

Розробляються алгебраїчні методи інтервального аналізу побудови робастного керування лінійних диференціальних систем другого порядку

$$\ddot{q} + \widetilde{L}\,\dot{q} + \widetilde{N} q = \widetilde{F} u, \tag{1}$$

де $q \in \mathbb{R}_n$, $u \in \mathbb{R}_m$, $\widetilde{L}$, $\widetilde{N}$, $\widetilde{F}$ – інтервальні матриці розмірів $n \times n$, $n \times n$, $n \times m$ відповідно, $f(q, \dot{q}, t) = \widetilde{F} u$, u – вектор керування.

Для системи (1) робастне керування шукається у вигляді множини регуляторів

$$u = -R^{-1} \widetilde{F}^T \widetilde{X} x, \tag{2}$$

які забезпечують оптимальну стабілізацію системи (1) з квадратичним критерієм якості

$$\widetilde{J}(x,u)=\int\limits_0^\infty (x^T\widetilde{Q}x+u^TRu)dt,$$

$\widetilde{Q}=\widetilde{Q}^T\geq 0\,,\ 0<R\in\mathbb{R}_{m\times m}\,.$

Для керування (2) шукаються зовнішні оцінки множини $\widetilde{X}$, тобто, ставиться задача знайти інтервальну матрицю $\widetilde{X}_{ext}=[\underline{X}_{ext};\overline{X}_{ext}]$, яка включає множину $\widetilde{X}$. Зовнішні оцінки $\widetilde{X}_{ext}$ і керування $u=-R^{-1}\widetilde{B}^T\widetilde{X}_{ext}x$ забезпечують стійкість більш "широкої" множини системи (1), оскільки оцінка $\widetilde{X}_{ext}$ містить додаткові розв'язки по відношенню до множини $\widetilde{X}$.

Вираз (2) зводиться до вигляду

$$u=-R^{-1}\widetilde{F}^T\left[\widetilde{X}_2^T,\widetilde{X}_3\right]x,$$

де квадратні інтервальні матриці $\widetilde{X}_2,\widetilde{X}_3$ визначаються через границі матриць з дійсними коефіцієнтами

$$\widetilde{X}_2=\lim_{k\to\infty}\widetilde{X}_2(k)=\left[\lim_{k\to\infty}\underline{X}_2(k),\lim_{k\to\infty}\overline{X}_2(k)\right],\quad \widetilde{X}_3=\lim_{k\to\infty}\widetilde{X}_3(k)=\left[\lim_{k\to\infty}\underline{X}_3(k),\lim_{k\to\infty}\overline{X}_3(k)\right].$$

Для знаходження нижніх оцінок $\underline{X}_2$, $\underline{X}_3$ та верхніх оцінок $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$ інтервальних матриць $\widetilde{X}_2$ та $\widetilde{X}_3$ застосовується ітераційний процес, на кожному кроці якого розв'язується два матричних рівняння типу Ляпунова.

Єфективність методу демонструється на прикладі роторної системи з інтервальними матрицями потенціальних та неконсервативних сил.

КВАЗІЛІНІЙНА ГІПЕРБОЛІЧНА ЗАДАЧА СТЕФАНА З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Руслан В. Андрусяк
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
e-mail: ru.andrusyak@gmail.com

Нехай $D_T^s=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:\ 0<t<T,\ s_1(t)<x<s_2(t)\}$ – область з вільними (невідомими) межами $s(t)=(s_1(t),s_2(t)):\ [0,T]\to\mathbb{R}^2$. В області D_T^s розглянемо гіперболічну систему квазілінійних рівнянь, записану в інваріантах

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\lambda_i(x,t,u)\frac{\partial u_i}{\partial x}=f_i(x,t,u),\quad i\in\{1,\dots,n\},\tag{1}$$

де $u(x,t)=(u_1(x,t),\dots,u_n(x,t)):\overline{D_T^s}\to\mathbb{R}^n$ – шукані функції, а $\lambda_i(x,t,u):\mathbb{R}^{n+2}\to\mathbb{R}$, $f_i(x,t,u):\mathbb{R}^{n+2}\to\mathbb{R}$ – відомі функції. Нехай поведінка функцій s_j описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{ds_j}{dt}=g_j(s,t,\widehat{u}(s,t)),\quad j\in\{1,2\},\tag{2}$$

де $\widehat{u}(s,t) = (u(s_1,t), u(s_2,t)) :\ \mathbb{R}^2 \times [0,T] \to \mathbb{R}^{2n}$, а $g_j(s,t,\widehat{u}) :\ \mathbb{R}^{2n+3} \to \mathbb{R}$ – відомі функції. Доповнимо системи (1), (2) початковими умовами

$$s(0) = s^0, \quad u(x,0) = \alpha(x), \quad x \in [s_1^0, s_2^0], \tag{3}$$

де $s^0 = (s_1^0, s_2^0)$ – задані значення, а $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)) :\ [s_1^0, s_2^0] \to \mathbb{R}^n$ – заданий набір функцій, та припустимо, що на бічних межах області D_T^s задовольняються нелокальні крайові умови

$$u_i(s_j(t),t) = \beta_{ij}\left(s(t), t, \widetilde{u}(s(t),t), \int\limits_{s_1(t)}^{s_2(t)} \gamma_{ij}(y,t,u(y,t))dy \right), \quad j \in \{1,2\}, \quad i \in I_j, \tag{4}$$

де $\widetilde{u}(s,t) = (u_{i_1}(s_1,t), \dots, u_{i_{k_1}}(s_1,t), u_{j_1}(s_2,t), \dots, u_{j_{k_2}}(s_2,t))$, а $\{i_1, \dots, i_{k_1}\} = \{1, \dots, n\} \backslash I_1$, $\{j_1, \dots, j_{k_2}\} = \{1, \dots, n\} \backslash I_2$, причому $\beta_{ij}(s,t,\widetilde{u},v) :\ \mathbb{R}^{k_1+k_2+4} \to \mathbb{R}$, $\gamma_{ij}(x,t,u) :\ \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ – відомі функції, а множини індексів I_1, I_2 визначаються наступним чином:

$$I_1 = \{i \in \{1, \dots, n\} :\ \lambda_i(s_1^0, 0, \alpha(s_1^0)) > g_1(s^0, 0, \widehat{\alpha}(s^0))\},$$

$$I_2 = \{i \in \{1, \dots, n\} :\ \lambda_i(s_2^0, 0, \alpha(s_2^0)) < g_2(s^0, 0, \widehat{\alpha}(s^0))\},$$

де $\widehat{\alpha}(s^0) = (\alpha(s_1^0), \alpha(s_2^0))$.

Встановлено достатні умови локальної розв'язності задачі (1)-(4) в узагальненому сенсі. При доведенні використано принцип стисних відображень.

1. Андрусяк Р. В., Кирилич В. М., Мышкис А. Д., *Локальная и глобальная разрешимости квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой*, Дифференц. уравнения, 2006, **42**, №4, 489-503.
2. Turo J., *Mixed problems for quasilinear hyperbolic systems*, Nonlin. Anal., Theory, Meth., Appl., 1997, **30**, №4, 2329-2340.

УЗАГАЛЬНЕНЕ ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ ЛІНІЙНИМИ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ З НЕВІД'ЄМНО ВИЗНАЧЕНИМИ ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Андрій В. Анікушин, Дмитро А. Номіровський

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

e-mail: anik_andrii@ukr.net

В роботі розглянуто лінійний оператор

$$\mathcal{L}u = u(x,t) - \int_0^t K(t,\tau) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x_i^2}\, d\tau, \tag{1}$$

де $u(x,t)$ – функція, що описує стан системи в області $Q=\Omega\times(0,T)$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з гладкою межею $\partial\Omega$. Припустимо, що ядро інтегрального оператора $K(t,\tau)\in L_2([0,T]^2)$ невід'ємно визначене, тобто для довільної $f\in L_2[0,T]$ має місце нерівність

$$\int_0^T\int_0^t K(t,\tau)f(\tau)f(t)\,d\tau dt\geq 0.$$

Через W^+_{BR} позначимо поповнення простору гладких функцій, що задовольняють граничні умови $u|_{\partial\Omega}=0$, за нормою

$$\|u\|^2_{W^+_{BR}}=\|u\|^2_{L_2(Q)}+\sum_{i=1}^n(Bu_{x_i},u_{x_i})_{L_2(Q)},$$

а через W^-_{BR} – негативний простір, побудований за W^+_{BR} відносно $L_2(Q)$.

В роботі доведено оцінки для оператора $\mathcal{L}$

$$\begin{cases} c^{-1}\|u\|_{W^+_{BR}}\leq\|\mathcal{L}u\|_{W^-_{BR}}\leq c\|u\|_{W^+_{BR}},\\ c^{-1}\|v\|_{W^+_{BR}}\leq\|\mathcal{L}^*v\|_{W^-_{BR}}\leq c\|v\|_{W^+_{BR}}.\end{cases}$$

На основі цих оцінок та робіт [1-2] отримано теореми узагальненої розв'язності рівняння $\mathcal{L}u=F$, дослідженно існування оптимального керування для задачі

$$\mathcal{L}u=f+A(h),$$

$$J(h)=\|u(h)-z_0\|^2=\int_Q(u(h)-z_0)^2\,dQ\to\min,$$

де $h\in H$ – кервання з допустимої множини U_∂, $f\in W^-_{BR}$, а $z_0\in W^+_{BR}$ – заданий елемент. Побудовано аналог методу Гальоркіна.

1. Lyashko S.I., *Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters* – Boston-Dordrecht-London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
2. Ляшко С.И., *Обобщенное управление линейными системами*, К.: Наукова думка, 1998.

[1] Робота частково підтримана ДФФД – грант Президента України для молодих учених №GP/F27/0022

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ЗА ЧАСОМ ОБЛАСТІ

Галина Р. Базиляк
Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна
e-mail: torgan_g@yahoo.com

Нехай Ω – обмежена область з межею $\partial\Omega\in C^1$; $Q=\Omega\times(0,+\infty)$, $Q_T=\Omega\times(0,T)$, де $T>0$, $\Omega_\tau=\Omega\times\tau$, $\tau\in[0,T)$.

В області Q розглянемо мішану задачу для рівняння

$$u_{tt}+\sum_{i,j,l,s=1}^{n}\left(a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\right)_{x_ix_j}-\sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)|u_{tx_i}|^{q-2}u_{tx_i}\right)_{x_i}-\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(x)u_{tx_i})_{x_j}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(b_i(x)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i}\right)_{x_i}+a_0(x)u_t+b_0(x)u+c_0(x)|u|^{p-2}u=f(x,t) \qquad (1)$$

з початковими і крайовими умовами

$$u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x), \quad x\in\Omega, \qquad (2)$$

$$u\big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\Omega}=0, \qquad (3)$$

де ν – зовнішня одинична нормаль до $\partial\Omega$, $f\in L^2(Q)$.

Аналогічно як в [1], за виконання певних умов гладкості щодо коефіцієнтів рівняння (1) та $u_0\in H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega)$, $u_1\in H_0^2(\Omega)$; $q\geq 3$ при $n\leq 2$ і $3<q\leq\dfrac{n}{n-2}$ при $n>2$; $p>2$ при $n\leq 4$, і $p\leq\dfrac{2n}{n-4}$ при $n>4$, доведено існування локального узагальненого розв'язку задачі (1)-(3) і встановлено його поведінку при $t\to+\infty$.

1. Торган Г. *Поведінка розв'язків мішаної задачі для параболічного рівняння четвертого порядку на нескінченності*, Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат., 2008, **69**, 72-77.

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ФУР'Є-ЕЙЛЕРА-ФУР'Є

Степан Г. Блажевський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області $D_2=\{(t,r):\ t\in I_2==(-\infty,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,R_3),\ R_3<\infty\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь дифузії параболічного типу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+\gamma_1^2u_1-a_1^2\frac{\partial^2u_1}{\partial r^2}=f_1(t,r), & r\in(-\infty,R_1),\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}+\gamma_2^2u_2-a_2^2B_\alpha^*[u_2]=f_2(t,r), & r\in(R_1,R_2),\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t}+\gamma_3^2u_3-a_3^2\frac{\partial^2u_3}{\partial r^2}=f_3(t,r), & r\in(R_2,R_3),\end{cases}$$

за початковими умовами

$$u_1(t,r)|_{t=0}=g_1(r), \quad r\in(-\infty,R_1),$$

$$u_2(t,r)|_{t=0} = g_2(r), \quad r \in (R_1, R_2),$$
$$u_3(t,r)|_{t=0} = g_3(r), \quad r \in (R_2, R_3),$$

умовами спряження

$$(L_{j1}^k[u_j(t,r)] - L_{j2}^k[u_{j+1}(t,r)])|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t), \quad j,k = 1,2,$$

та крайовими умовами

$$\lim_{r=-\infty} \frac{\partial^k u_1}{\partial r^k} = 0, \quad k = 0,1, \quad L_{22}^3[u_3(t,r)]|_{r=R_3} = g_k(t),$$

де

$$L_{jm}^k = \Big(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}\Big)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}, \quad j,m,k \in \{1,2\}.$$

У системі (1) бере участь диференціальний оператор

$$B_\alpha^* = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1) r \frac{d}{dr} + \alpha^2, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2}.$$

У роботі отримано розв'язок задачі (1)-(3)

$$u_j(t,r) = \sum_{m,k=1}^{2} \Big[\int_0^t R_{\alpha;mk}^j(t-\tau,r)\omega_{jk}(\tau)d\tau + R_{\alpha;mk}^j(t,r)\psi_{mk}\Big] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{3} \int_0^t \int_{R_k}^{R_{k+1}} H_{\alpha;jk}(t-\tau,r,\rho)[f_k(\tau,\rho) + g_k(\rho)\delta_+(\tau)]a_k^{-2} d\rho d\tau, \quad j \in \{1,2,3\}, \quad R_0 = -\infty.$$

Розв'язок зручно використовувати в інженерних розрахунках при моделюванні процесів дифузії в неоднорідних середовищах з м'якими межами.

ЗАДАЧІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Микола М. Бокало

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

e-mail: mm.bokalo@gmail.com

Розглядаються задачі без початкових умов для деяких класів еволюційних рівнянь з першою похідною за часовою змінною. Одна із них така.

Нехай Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ з межею $\partial\Omega$, яка є C^1 многовидом розмірності $n-1$; Γ_0 – замкнена множина на $\partial\Omega$ (зокрема, Γ_0 може бути порожньою множиною або збігатися з $\partial\Omega$), $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$; $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі; $S = (-\infty, 0]$; $Q = \Omega \times S$, $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times S$, $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times S$.

Припускаємо, що $0 \in \Omega$ і для будь-якого $R > 0$ під Ω_R розуміємо зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x : |x| < R\}$, яка містить 0. Нехай $\Gamma_{1,R} = \Gamma_1 \cap \partial\Omega_R$.

Динамічна крайова задача без початкових умов: знайти функцію $u : \overline{\Omega} \times S \to \mathbb{R}$ таку, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(b_1(x)u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x,t,u,\nabla u) + a_0(x,t,u,\nabla u) = f_1(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(y,t) = 0, \quad (y,t) \in \Sigma_0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(b_2(y)\,u) + \sum_{i=1}^{n} a_i(y,t,u,\nabla u)\,\nu_i(y) + c(y,t,u) = f_2(y,t), \quad (y,t) \in \Sigma_1, \tag{3}$$

де $a_i\,(i = \overline{0,n}), c, f_1, f_2, b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$ – деякі задані дійснозначні функції, причому b_1, b_2 можуть приймати нульові значення на довільних підмножинах відповідних множин.

Наклавши певні умови на вихідні дані, даємо означення узагальненого розв'язку задачі (1)-(3) і доводимо її коректність.

Модельним прикладом коректної задачі типу (1)-(3) є така:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + |u|^{p-2}u = f_1(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

$$u(y,t) = 0, \quad (y,t) \in \Sigma_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \nu} + |u|^{q-2}u = f_2(y,t), \quad (y,t) \in \Sigma_1,$$

де числа $p > 2$, $q > 2$ – такі, що $\operatorname{mes}\Omega_R \cdot R^{-2/(p-2)} + \operatorname{mes}\Gamma_{1,R} \cdot R^{-2/(q-2)} \to 0$ при $R \to +\infty$, а також $f_1 \in L_{p',\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $f_2 \in L_{q',\mathrm{loc}}(\overline{\Sigma}_1)$.

Зауважимо, що ми не накладаємо ніяких обмежень на поведінку розв'язку та зростання правих частин рівнянь задачі на нескінченності.

ОДНОЗНАЧНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ПОДВІЙНО НЕЛІНІЙНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ ЗІ ЗМІННИМ СТЕПЕНЕМ НЕЛІНІЙНОСТІ

Тарас М. Бокало, Олег М. Бугрій, Тетяна М. Савіцька
Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна
e-mails: tbokalo@gmail.com, ol_buhrii@i.ua, tetjankas@mail.ru

У доповіді йтиметься про два класи подвійно нелінійних параболічних варіаційних нерівностей з лінійною і нелінійною головною частиною, а саме про нерівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[|u|^{r-2}u_t(v-u) + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x,t,u_{x_1},\ldots,u_{x_n})(v-u)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i}(v-u) +$$

$$+c(x,t)u(v-u)+g(x,t)|u|^{q(x)-2}u(v-u)\Big]\,dxdt \geq \int\limits_{Q_{0,T}} f(x,t)(v-u)\,dxdt \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$u|_{t=0}=0 \qquad (2)$$

у випадках:

- $A_{ij}(x,t,u_{x_1},\dots,u_{x_n})=a_{ij}(x,t)u_{x_i}$ $(i,j=\overline{1,n})$;
- $A_{ij}(x,t,u_{x_1},\dots,u_{x_n})=0$ при $i\neq j$, $A_{i,i}(x,t,u_{x_1},\dots,u_{x_n})=a_i(x,t)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}$, $b_i(x,t)=0$ $(i,j=\overline{1,n})$.

Коефіцієнти нерівності задовольняють умови:

(C): $c\in L^\infty(Q_{0,T})$, $c(x,t)\geq c_0$ майже для всіх $(x,t)\in Q_{0,T}$;

(G): $g\in L^\infty(Q_{0,T})$, $g(x,t)\geq g_0>0$ майже для всіх $(x,t)\in Q_{0,T}$.

Крім того, у першому випадку виконуються умови

(A1): $a_{ij}\in L^\infty(Q_{0,T})$, $a_{ij}=a_{ji}$, $(i,j=\overline{1,n})$,
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geq a_0|\xi|^2$ для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$ та майже для всіх $(x,t)\in Q_{0,T}$,
де $a_0>0$;

(B): $b_i\in L^\infty(Q_{0,T})$, $|b_i(x,t)|\leq b_0$ майже для всіх $(x,t)\in Q_{0,T}$,

а у другому випадку – умова

(A2): $a_i\in L^\infty(Q_{0,T})$, $a_i(x,t)\geq a_0>0$ майже для всіх $(x,t)\in Q_{0,T}$ $(i=\overline{1,n})$.

Знайдено умови однозначної розв'язності задачі (1), (2).

МНОГОВИД ЕЛІПТИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ З ФІКСОВАНОЮ КРАТНІСТЮ ВИБРАНОГО ВЛАСНОГО ЗНАЧЕННЯ

Олександр О. Бондар
Луганський національний університет імені Тараса Шевченка, Луганськ, Україна
e-mail: a.-bondar@mail.ru

В.І. Арнольдом у роботі [1] сформульована "гіпотеза трансверсальності" про те, що в "природному" сімействі дійсних симетричних еліптичних операторів, визначених на компактних областях, ті оператори, у яких вибране власне значення має фіксовану кратність, утворюють банаховий гладкий підмноговид скінченної корозмірності. Ним же була отримана формула корозмірності, яка залежить лише від кратності власного значення. Достатні умови виконання гіпотези були отримані D. Lupo, A.M. Micheletti [2] (для сімейства операторів Лапласа на змінній компактній області визначення) та Я.М. Димарським [3] (для сімейства операторів вигляду лапласіан плюс потенціал зі змінним потенціалом).

Нами буде розглянуто сімейство комплексних несиметричних еліптичних операторів другого порядку, визначених на компактних областях, у яких кратність вибраного власного значення фіксована. Для сімейства отримано аналог гіпотези Арнольда. Виявляється, що формула комплексної корозмірності многовидів, що вивчаються, відрізняється від формули Арнольда, хоча як і раніше залежить лише від кратності власного значення.

1. Арнольд В.И. *Моды и квазимоды*, Функц. анализ и его прилож, 1972, **6**, № 2, 94-101.
2. Lupo D., Micheletti A.M. *On the persistence of the multiplicity of eigenvalues for some variational operator depending on the domain*, J. Math. Anal. and Appl., 1995, **193**, 990-1002.
3. Dymarskii Ya.M. *Manifold Method in the Eigenvector Theory of Nonlinear Operators*, Journal of Mathematical Sciences, 2008, **154**, №5, 655-815.

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ, ПРИВОДЯЩЕМ К ИЗГИБУ

Наталия С. Бондаренко

Донецкий национальный университет,

Донецк, Украина

e-mail: bondarenko_n_s@mail.ru

Широкое использование композиционных материалов в современной промышленности обуславливает актуальность задач о локальных тепловых воздействиях на анизотропные пластины. Термоупругое состояние транстропных пластин при локальном нагреве, вызванном «плоскими» источниками тепла, исследовано в работе [1].

Рассмотрена бесконечная транстропная пластина в безразмерной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3, определенной с точностью до полутолщины пластины h. На лицевых поверхностях пластины осуществляется конвективный теплообмен по закону Ньютона с внешней средой нулевой температуры.

Пластина нагревается «изгибными» источниками тепла в локальной области Ω. Объемная плотность источников тепла представлена в виде:

$$W_0(x_1, x_2, x_3) = W_0^* g(x_1, x_2) f(x_3),$$

где W_0^* – размерная константа; $g(x_1, x_2)$ – закон распределения источников тепла по области Ω; $f(x_3)$ – нечетная функция, описывающая закон распределения объемных источников тепла по толщине пластины.

В качестве исходной взята система уравнений термоупругости {1,2}-аппроксимации [3], позволяющая учесть поперечные касательные и нормальные напряжения. Фундаментальное решение этой системы найдено в статье [2]. Для нахождения компонент локального термоупругого состояния использована формула свертки.

Численные исследования проведены для транстропной пластины, нагреваемой по области $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ в случае симметричного теплообмена. Рассмотрен как равномерный нагрев $(g = const)$, так и нагрев по закону нормального распределения $(g = exp\{-(x_1^2 + x_2^2)\})$.

Построены графики обобщенных усилий и моментов – компонент разложения напряжений в ряды Фурье по полиномам Лежандра. Эти графики иллюстрируют влияние термомеханических параметров транстропного материала и формы распределения источников тепла по области Ω на компоненты термоупругого состояния.

1. Бондаренко Н.С., Гольцев А.С., *Термоупругое состояние трансверсально-изотропных пластин при локальном равномерном нагреве*, Актуальные пробл.

механики деформ. твердого тела: Матер. VI Междунар. науч. конф. (Донецк-Мелекино, 8-11 июня 2010г.), Донецк, 2010, 32-36.
2. Бондаренко Н.С., Гольцев А.С., Шевченко В.П., *Фундаментальные решения уравнений термоупругости трансверсально-изотропных пластин*, Прикл. механика, 2010, **46**, №3, 51-60.
3. Пелех Б.Л., Лазько В.А., *Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений*, Киев, 1982.

ЗАДАЧА З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Наталя О. Бурдейна
Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна
e-mail: n_burdeina@ukr.net

В області $G_T^a = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : a_1(t) < x < a_2(t),\ 0 < t < T\}$ з невідомими наперед межами $a_k(t)$, $k \in \{1,2\}$, розглянемо систему

$$\sum_{k=1}^{n} g_k^i(x,t,u)\left(\frac{\partial u_k}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u)\frac{\partial u_k}{\partial x}\right) = f_i(x,t,u), \quad i \in \{1,...,n\}, \tag{1}$$

$$\frac{da_k}{dt} = h_k(t,a(t),u(a(t),t)), \quad k \in \{1,2\}, \quad a(t) = (a_1(t),a_2(t)), \tag{2}$$

$$u(x,t) = (u_1(x,t),...,u_n(x,t)), \quad u(a(t),t) = (u(a_1(t),t),u(a_2(t),t)),$$

де $\lambda_i(x,t,u)$, $f_i(x,t,u):\ \mathbb{R}\times[0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h_k(t,y,w):\ [0,T]\times\mathbb{R}^{2+2n} \to \mathbb{R}$ – задані функції.

Початкові умови для невідомих функцій мають вигляд

$$a(0) = a^0, \quad a^0 = (a_1^0, a_2^0), \quad a_1^0 < a_2^0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = g(x), \quad a_1^0 \le x \le a_2^0, \quad g(x) = (g_1(x),...,g_n(x)). \tag{4}$$

Тут a^0 – відомий набір значень, $g(x):[a_1^0,a_2^0] \to \mathbb{R}$ – задані функції.

Введемо позначення

$$I_k = \Big\{i:\ \mathrm{sgn}\Big(\lambda_i(a_k^0,0,g(a_k^0)) - h_k(0,a^0,g(a^0))\Big) = (-1)^{k+1}\Big\},$$

$$r_k = \mathrm{card} I_k, \quad k \in \{1,2\}.$$

Тоді крайові умови на межі області запишемо так

$$u_i(a_k(t),t) = \mu_k^i(t,a(t),\widehat{u}(a(t),t)), \quad i \in I_k, \quad k \in \{1,2\}, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

де $\widehat{u}(a(t),t) = (u_i(a_k(t),t))$, $i \notin I_k$, $k \in \{1,2\}$, а функції $\mu_k^i(t,y,\widehat{w}) : [0,T]\times\mathbb{R}^{2+2n-r_1-r_2} \to \mathbb{R}$ – задані, причому $\widehat{w} = (\widehat{w}^1,\widehat{w}^2)$, $\widehat{w}^k = (\widehat{w}_1^k,...,\widehat{w}_{n-r_k}^k)$, $k \in \{1,2\}$.

Використовуючи методику праці [1], доведено коректну локальну узагальнену неперервну розв'язність задачі (1)-(5).

1. Андрусяк Р. В., Бурдейна Н. О., Кирилич В. М. *Квазілінійна гіперболічна задача з нелокальними крайовими умовами*, Укр. мат. журн., 2010, **62**, № 9, 1172-1199.

УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ ОБЩИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Владимир П. Бурский
ИПММ НАНУ,
Донецк, Украина
e-mail: v30@dn.farlep.net

Хорошо известно, что условием фредгольмовости общей дифференциальной граничной задачи для правильно эллиптического уравнения является условие Я.Б. Лопатинского.

В докладе предложено условие фредгольмовости общей граничной задачи для неправильно эллиптического уравнения. Это условие записывается в виде двух условий Лопатинского для двух граничных задач с правильно эллиптическими уравнениями, которые построены по исходной задаче.

Используются граничные задачи в обобщенной постановке для уравнений вида:

$$\mathcal{L}^+ \circ \mathcal{L}\, u = f \tag{1}$$

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^+\, v = g \tag{2}$$

где $\circ$ – композиция, $\mathcal{L} = \sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ – произвольная дифференциальная операция, $\mathcal{L}^+ = \sum\limits_{|\alpha|\le l} D^\alpha(a^*_\alpha(x)\ \cdot)$ – формально сопряженная операция ($a^*_\alpha(x)$ – сопряженное число или сопряженная матрица). Для неправильно эллиптической операции $\mathcal{L}$ операции $\mathcal{L}^+ \circ \mathcal{L}$ и $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^+$ – правильно эллиптические и потому к ним применима теория Лопатинского.

ФОРМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОБЩЕЙ ЭКВИВАРИАНТНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КРУГЕ

Владимир П. Бурский, Инна И. Куракина
Донецкий национальный университет,
Донецк, Украина
e-mail: v30@dn.farlep.net, inna-cin@mail.ru

Целью работы является нахождение формального решения смешанной эквивариантной граничной задачи в области $\Omega = K \times [0, T]$, где $K = \{x \in R^2 : |x| \le 1\}$ – единичный круг с границей ∂K для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \tag{1}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x) \tag{2}$$

и общим инвариантным относительно группы поворотов граничным условием

$$\alpha{*}u|_{\partial K} + \beta{*}u'_\nu|_{\partial K} = 0, \tag{3}$$

где $\alpha = \Sigma\alpha_k e^{ik\tau}$, $\beta = \Sigma\beta_k e^{ik\tau}$ – функции на единичной окружности ∂K произвольной гладкости, разложенные в ряд Фурье; u_0 – некоторая функция из класса $L_{2,r}(\Omega)$; $*$ – свертка на ∂K: $\alpha * \psi = \Sigma\alpha_k\psi_k e^{ik\tau}$. Удается применить метод разделения переменных в общей ситуации. В итоге решение задачи в полярных координатах запишется в виде формального ряда:

$$u(r,t,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}(r,t,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[\widetilde{A}_{n,m}\cos n\phi + \widetilde{B}_{n,m}\sin n\phi]e^{-(\mu_m^{(n)})^2 t}J_n(\mu_m^{(n)}r),$$

где

$$\widetilde{A}_{n,m} = \frac{2(\mu_m^{(n)})^2}{[(\mu_m^{(n)})^2[J'_\nu(\mu_m^{(n)})]^2 + ((\mu_m^{(n)})^2-\nu^2)[J_{\nu+1}(\mu_m^{(n)})]^2]}\int_0^{2\pi}\int_0^1 ru_0(r,\phi)\cos n\phi J_n(\mu_m^{(n)}r)drd\phi,$$

$$\widetilde{B}_{n,m} = \frac{2(\mu_m^{(n)})^2}{[(\mu_m^{(n)})^2[J'_\nu(\mu_m^{(n)})]^2 + ((\mu_m^{(n)})^2-\nu^2)[J_{\nu+1}(\mu_m^{(n)})]^2]}\int_0^{2\pi}\int_0^1 ru_0(r,\phi)\sin n\phi J_n(\mu_m^{(n)}r)drd\phi.$$

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*, Т. 2, Москва, 1974.
2. Бурский В.П. *Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений*, Киев, 2002.

ЗБУРЕНІ УЛЬТРАСУБГАРМОНІКИ СИСТЕМИ З ПІВТОРА СТУПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ, БЛИЗЬКОЇ ДО ГАМІЛЬТОНОВОЇ

Юлія Вакал

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

e-mail: iuliia.vakal@gmail.com

Розглядаємо двовимірну автономну гамільтонову систему з гетероклінічним контуром, яка зазнає малого неавтономного 2π-періодичного за часом збурення.

Запишемо збурену систему в змінних дія-кут $(I, \varphi|\mathrm{mod} 2\pi)$:

$$\dot{I} = \mu^2 Y(t,I,\varphi), \quad \dot{\varphi} = H'(I) + \mu^2\Psi(t,I,\varphi), \tag{1}$$

де Y та Ψ – 2π-періодичні функції по кожній зі змінних t та φ, μ – малий параметр. Нехай p/q – раціональне число з області значень функції $H'(I)$, а $I_{p/q}$ – таке значення дії, що $H'(I_{p/q}) = p/q$. Тоді при $\mu = 0$ лінія рівня $I = I_{p/q}$ складається з початкових значень $2\pi q$-періодичних розв'язків незбуреної системи, які мають вигляд $I = I_{p/q}$, $\varphi = \frac{p}{q}t + \varphi_0$ (φ_0 – довільна стала) і називаються (q/p)-*ультрасубгармоніками.*

Розв'язки збуреної системи (1), які мають вигляд $I = I_{p/q} + \mu y(t;\mu)$, $\varphi = \frac{p}{q}t + \psi(t;\mu)$, де $y(t;\mu)$, $\psi(t;\mu)$ – $2\pi q$-періодичні щодо часу функції, називаються *збуреними* (q/p)-*ультрасубгармоніками* (q-*субгармоніками*, якщо $p = 1$).

Класичний метод Пуанкаре дозволяє довести існування збурених ультрасубгармонік для всіх значень параметра μ з деякого малого проміжку $(0, \mu_{p/q})$ (залежного від p/q), якщо виконані такі дві умови: 1) $H''(I_{p/q}) \neq 0$ – умова невиродженості незбуреного гамільтоніана в точці $I_{p/q}$; 2) наявність хоча б одного простого нуля так званої ультрасубгармонічної функції Пуанкаре

$$P_{q/p}(\psi) := \frac{1}{2\pi q} \int_0^{2\pi q} Y\left(t, I_{p/q}, \frac{p}{q}t + \psi\right) dt$$

або, що те саме, ультрасубгармонічної функції Мельнікова $\mathcal{M}_{q/p}(\theta) = 2\pi p P_{q/p}(\theta p/q)$. Однак цей метод не дозволяє визначити число $\mu_{p/q}$ або характер його залежності від частоти p/q. Крім того, залишалося відкритим питання: скільки збурених ультрасубгармонік одночасно існують при заданому малому значенні параметра μ.

Нами доведена теорема, яка показує, що кількість ультрасубгармонік у збуреній системі (1) при прямуванні малого параметра збурення μ до нуля зростає не повільніше, ніж $\varsigma \ln^2 \mu$, де ς – деякий числовий коефіцієнт.

При встановленні нижніх оцінок для кількості збурених ультрасубгармонік знайдено ефективну оцінку апроксимації ультрасубгармонічної функції Пуанкаре деякою лінійною комбінацією p-фільтрацій гетероклінічних функцій Мельнікова (p-фільтрацією функції Мельнікова називається функція, яка отримується з ряду Фур'є функції Мельнікова вилученням гармонік із номерами, що не є кратними p), яка дала змогу отримати такі достатні умови існування збурених ультрасубгармонік, які є рівномірними щодо натуральних взаємно простих з p чисел q з деякого проміжку довжини $O(|\ln \mu|)$. При цьому вдалося замінити перевірку умови простоти нулів часткових границь послідовності $\{\mathcal{M}_{q/p}(\theta)\}_{q\in\mathbb{N}}$ умовою знакозмінності згаданої вище лінійної комбінації p-фільтрацій гетероклінічних функцій Мельнікова.

ПРО ІСНУВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ПОВЕРХОНЬ З СТАЦІОНАРНОЮ LGT-СІТКОЮ

Тетяна Ю. Вашпанова
Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова, Одеса, Україна
e-mail: tatyana_top@mail.ru

Відомо [1], що існування загальної нескінченно малої (з.н.м.) деформації регулярної поверхні S в E_3-просторі визначається розв'язком системи рівнянь

$$\widetilde{T}^{\alpha i}_{,\alpha} - b^i_\alpha T^\alpha + \mu_\alpha c^{\alpha i} = 0, \quad b_{\alpha\beta}\widetilde{T}^{\alpha\beta} + T^\alpha_{,\alpha} = 0, \quad c_{\alpha\beta}\widetilde{T}^{\alpha\beta} = 0, \tag{1}$$

де $b^i_\alpha = b_{\alpha\beta} g^{\beta i}$, $g^{\gamma k} = c^{\gamma\alpha} c^{k\beta} g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ – коефіцієнти першої та другої основних квадратичних форм S, $c^{\alpha\gamma} = g^{\alpha s} g^{\gamma t} c_{st}$, c_{st} – дискримінантний тензор S, $\widetilde{T}^{\alpha i}$, T^α – невідомі тензорні поля, $\mu(x^1, x^2)$ – деяка невідома функція. Комою тут позначено коваріантне диференціювання, а всі індекси набувають значень 1, 2.

Припустимо, що при з.н.м. деформації поверхні S зберігається (в головному) LGT-сітка, диференціальне рівняння якої має вигляд [2]:

$$h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0,$$

де $h_{\alpha\beta} = 2(Hg_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})$ – тензор LGT-сітки, H – середня кривина S. Тоді аналітична умова її стаціонарності може бути подана співвідношеннями:

$$[2H(c_{\alpha i}g_{\beta j} + c_{\beta i}g_{\alpha j}) - 2c_{\alpha i}b_{j\beta}]\widetilde{T}^{ij} = (\mu + \varphi)h_{\alpha\beta} - c^{\cdot j}_{\cdot k}T^{k}_{,j}\, g_{\alpha\beta} + 2c_{\alpha i}T^{i}_{,\beta}, \qquad (2)$$

де $\varphi(x^1, x^2)$ – деяка функція. Правильна така теорема.

Теорема 1. Для існування деформації однозв'язної регулярної поверхні S в класі C^3 з стаціонарною LGT-сіткою необхідно і достатньо, щоб система рівнянь (1), (2) мала ненульовий розв'язок.

Ця система рівнянь містить шість рівнянь відносно семи невідомих $\widetilde{T}^{11}$, $\widetilde{T}^{22}$, $\widetilde{T}^{12} = \widetilde{T}^{21}$, T^1, T^2, μ, φ. Отже, в загальному випадку вона може допускати розв'язок з однією довільною функцією.

Н.м. деформацію S з стаціонарною LGT-сіткою, вектор зсуву якої буде вектором зсуву для н.м. згинання, називатимемо *тривіальною.*

Теорема 2. Н.м. деформація з стаціонарною LGT-сіткою довільної регулярної поверхні S буде тривіальною тоді і тільки тоді, коли тензорні поля $\widetilde{T}^{\alpha\beta}$ задовольняють умову $\widetilde{T}^{\alpha\beta}(c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}) = 0$, а функція $\mu = 0$.

Наслідок. Кожна тривіальна н.м. деформація з стаціонарною LGT-сіткою довільної регулярної поверхні S буде тривіальною А-деформацією [1].

1. Безкоровайна Л.Л. *Структура множини розв'язків системи рівнянь для загальної нескінченно малої деформації*, Тези доп. міжнар. конф. "Геометрія в Одесі – 2004", Одеса, 2004, 7-8.
2. Безкоровайна Л.Л., Вашпанова Т.Ю. *Про А-деформації поверхонь з стаціонарною LGT-сіткою*, Тези доп. міжнар. конф. "Геометрія в Одесі – 2009", Одеса, 2009, 33.

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СИСТЕМОЮ БЕНАРА В УЗАГАЛЬНЕНІЙ КОМІРЦІ КУЕТТА ПРИ ПЕРФОРАЦІЇ ЇЇ ТОНКИМИ ЦИЛІНДРАМИ

Володимир В. Гоцуленко
Інститут підприємництва "Стратегія",
Жовті Води, Україна
e-mail: gosul@ukr.net

Структура усереднення як граничних задач, так і задач оптимального керування суттєво залежить від граничного значення $C_0 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sigma_\varepsilon$ параметру перфорації $\sigma_\varepsilon = \varepsilon^2 \log(1/R_\varepsilon)$ узагальненої комірки Куетта Ω_ε [1]. Розглядається наступна задача $(\mathbb{P}_\varepsilon)$:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{y}_\varepsilon + (\mathbf{y}_\varepsilon \cdot \nabla)\, \mathbf{y}_\varepsilon = -\nabla p_\varepsilon + \theta_\varepsilon \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}_3}, \\ \operatorname{div} \mathbf{y}_\varepsilon = 0, \\ -\Delta\theta_\varepsilon + (\mathbf{y}_\varepsilon \cdot \nabla)\, \theta_\varepsilon = \mathbf{y}_\varepsilon \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}_3} \end{cases} \quad \text{на} \quad \Omega_\varepsilon, \qquad (1)$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} \mathbf{y}_\varepsilon|_{\Gamma^1_\varepsilon} = \mathbf{y}^1_\varepsilon, \quad \mathbf{y}_\varepsilon|_{\Gamma^2_\varepsilon} = \mathbf{y}^2_\varepsilon, \quad \mathbf{y}_\varepsilon|_{\Gamma^3} = 0, \\ \mathbf{y}_\varepsilon|_{\partial\widehat{\mathrm{T}}^\varepsilon_{\mathbf{k}_j}} = \alpha^\varepsilon_{k_j}, \quad \theta_\varepsilon|_{\partial\widehat{\mathrm{T}}^\varepsilon_{\mathbf{k}_j}} = \beta^\varepsilon_{\mathbf{k}_j}, \quad (j = \overline{1; J_\varepsilon}), \\ \theta_\varepsilon|_{\Gamma^1_\varepsilon} = 0, \quad \theta_\varepsilon|_{\Gamma^2_\varepsilon} = 0, \quad \theta_\varepsilon|_{\Gamma^3} = b|_{\Gamma^3}. \end{cases} \tag{2}$$

та функціоналом якості

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\overline{\alpha_\varepsilon}, \mathbf{y}_\varepsilon) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{z}^\partial_\varepsilon|^2 dx + \frac{\beta \cdot \varepsilon}{r_\varepsilon} \sum_{j=1}^{J_\varepsilon} \int\limits_{\partial\widehat{\mathrm{T}}^\varepsilon_{\mathbf{k}_j}} |\alpha^\varepsilon_{\mathbf{k}_j}|^2 d\mathcal{H}^2 \to \inf . \tag{3}$$

Ґрунтуючись на результатах [1-2], доведено наступний результат.

Теорема. Нехай $C_0 = +\infty$, тоді задача $(\mathbb{P}_0)$, яка є варіаційною W – границею [2] послідовності задач оптимального керування $\{(\mathbb{P}_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$, може бути подана як наступна ізопериметрична задача варіаційного числення: мінімізувати інтеграл

$$\int\limits_\Omega |\mathbf{u}(x)|^2 dx \to \inf, \tag{4}$$

при обмеженнях

$$\left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \le \gamma, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \Omega, \\ \mathbf{u}|_{\Gamma^1} = \mathbf{y}^*|_{\Gamma^1}, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma^2} = \mathbf{y}^*|_{\Gamma^2}, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma^3} = 0, \\ \mathbf{y}^* \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \end{array} \right\}. \tag{5}$$

1. Гоцуленко В.В., Когут П.И., *Граничное управление ламинарным течением вязкой несжимаемой жидкости в обобщенной ячейке Куэтта. Асимптотический подход*, Автоматика и телемеханика, 2007, **8**, №2, 63-80.
2. Гоцуленко В.В., Когут П.И., *Субоптимальное граничное управление системой Бенара в цилиндрически перфорированной области*, Укр. мат. вісн., 2009, **6**, №4, 436-474.

АСИМПТОТИКА ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ СТРУННОЇ СІТКИ З КОНТРАСТНОЮ ГУСТИНОЮ

Геннадій Є. Грабчак

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

e-mail: h_hrabchak@franko.lviv.ua

Нехай Γ – зв'язний скінченний геометричний граф в $\mathbb{R}^3$, який є об'єднанням двох зв'язних підграфів Γ_1 і Γ_2, множину $\{a_1, \ldots, a_l\}$ спільних вершин яких позначимо через J_0. В контексті формулювання крайових задач на графах, через $\partial\Gamma$

позначатимемо сукупність вершин, в яких задано умови Діріхле, а через J – решту вершин графа, які називатимемо внутрішніми. Вважаємо, що серед вершин підграфа Γ_1 немає точок з $\partial\Gamma$ (зокрема тоді $J_0 \subset J$). Нехай $I(a)$ – сукупність ребер γ графа Γ, інцидентних вершині a. Для функції u, заданої на Γ, через $\frac{du}{d\gamma}(a)$ позначимо граничне значення у вершині a похідної функції u вздовж ребра γ у напрямку від a. Ми вивчаємо асимптотику спектра крайової задачі

$$u_\varepsilon''+\lambda^\varepsilon\rho_\varepsilon u_\varepsilon = 0 \text{ на ребрах } \Gamma; \quad \sum_{\gamma\in I(a)} \frac{du_\varepsilon}{d\gamma}(a) = 0,\ a\in J; \quad u=0 \text{ на } \partial\Gamma. \quad (1)$$

Крім того, у вершинах графа задано умови неперервності розв'язку. Тут λ^ε – спектральний параметр; $\rho_\varepsilon = p$ на Γ_1 і $\rho_\varepsilon = \varepsilon q$ на Γ_2, де p і q – гладкі, обмежені, додатні на ребрах графів Γ_1 та Γ_2, відповідно, функції. Задача (1) описує власні коливання двокомпонентної струнної сітки з суттєво різними лінійними густинами. В [1] досліджено аналогічну задачу для оператора четвертого порядку на відрізку, яка описує власні коливання стержня, важча компонента якої є його середньою, а легша – крайніми частинами.

Нами з'ясовано і досліджено граничну при $\varepsilon\to 0$ задачу (див. (2) нижче), побудовано та обґрунтовано повні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра власних значень і відповідних власних функцій задачі (1) з фіксованими номерами. Позначимо через J_k внутрішні вершини графа Γ, які є вершинами підграфа Γ_k, за виключенням точок з J_0 ($k=1,2$). Нехай λ і u – головні члени асимптотик розв'язку задачі (1); v – звуження u на Γ_1; $T\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ – лінійний оператор в $\mathbb{R}^l$, значенням якого на заданому векторі $y=(y_1,\dots,y_l)\in\mathbb{R}^l$ є вектор $z=Ty$ з компонентами $z_i=(Ty)_i=\sum_{\gamma\in I(a_i)}\frac{dw}{d\gamma}(a_i)$, $i=1,\dots,l$, де w – розв'язок задачі:

$$w''=0 \text{ на ребрах } \Gamma_1;\ w=0 \text{ на } \partial\Gamma;\ \sum_{\gamma\in I(a)}\tfrac{dw}{d\gamma}(a)=0,\ a\in J_2;\ w(a_i)=y_i,\ i=1,\dots,l.$$

Тоді граничною для (1) є спектральна задача

$$\begin{gathered} v''+\lambda p v = 0 \text{ на ребрах } \Gamma_1; \qquad \sum_{\gamma\in I(a)}\tfrac{dv}{d\gamma}(a)=0,\quad a\in J_1; \\ \sum_{\gamma\in I(a)}\tfrac{dv}{d\gamma}(a_i)+\langle Te_i,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}^l}\, v(a_i)=0,\quad a_i\in J_0,\quad i=1,\dots,l, \end{gathered} \quad (2)$$

де $e_1,\dots,e_l$ – канонічний базис, а $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^l}$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^l$.

1. Бабич Н.О., *Коливна система, що містить частину із малою кінетичною енергією* (Препр. НАН України. Центр мат. моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача; 01-2001), Львів, 2001.

ЗАДАЧА З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ ДЛЯ СЛАБКО ВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Надія М. Гринців
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
e-mail: hryntsiv@ukr.net

В області $\Omega_T=\{(x,t):\ 0<x<h(t),\ 0<t<T<\infty\}$, де $h=h(t)$ – невідома функція, розглядається обернена задача визначення залежного від часу коефіцієнта $b = b(t)$ перед першою похідною невідомої функції $u = u(x,t)$ у параболічному рівнянні

$$u_t = a(x,t)t^\beta u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

та інтегральними умовами перевизначення

$$\int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int\limits_0^{h(t)} xu(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Функція $a = a(x,t)$ вважається строго додатною в області Ω_T. Дослідження проводиться у випадку слабкого степеневого виродження, коли $0 < \beta < 1$.

Під розв'язком задачі (1)-(5) розуміється трійка функцій $(b, h, u) \in C[0,T]\times \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T]$, що задовольняє рівняння (1) та умови (2)-(5).

Заміною змінних $y = \frac{x}{h(t)}$, $t = t$ задача (1)-(5) зводиться до оберненої задачі відносно невідомих функцій (b, h, v), де $v(y,t) \equiv u(yh(t),t)$, в області з фіксованими межами $Q_T = \{(y,t) : \ 0 < y < 1, \ 0 < t < T\}$. Використовуючи теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, встановлено достатні умови існування розв'язку згаданої задачі. Доведення єдиності розв'язку базується на властивостях розв'язків однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду з інтегровними ядрами.

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Ірина М. Довжицька
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: ira_nezvanova@mail.ru

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними натурального порядку p

$$\partial_t u(t;x) = \sum_{|k|_*\le p} a_k(t;x) i^{|k|_*}\partial_x^k u(t;x), \quad t\in(0;T], \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

таке, що його права частина допускає зображення

$$\sum_{|k|_*\le p} a_k(t;x) i^{|k|_*}\partial_x^k u(t;x) = \{P_0(t, i\partial_x) + P_1(t,x;i\partial_x)\}u(t;x),$$

де

$$P_0(t,i\partial_x) := \sum_{|k|_*\le p} a_{0,k}(t) i^{|k|_*}\partial_x^k,$$
$$P_1(t,x;i\partial_x) := \sum_{|k|_*\le p_1} a_{1,k}(t;x) i^{|k|_*}\partial_x^k,$$

коефіцієнти $a_{0,k}(t)$ – визначені на відрізку $[0;T]$ неперервні функції, $a_{1,k}(t;x)$ – неперервні за змінною t, нескінченно диференційовні за змінною x обмежені функції, T – фіксоване додатне число, $\mathbb{R}^n$ – дійсний простір розмірності $n\ge 1$, i – уявна одиниця, $|k|_* := |k_1| + ... + |k_n|$, причому відповідне рівняння

$$\partial_t u(t;x) = P_0(t,i\partial_x)u(t;x), \quad t\in(0;T], \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{2}$$

є параболічним за Шиловим з показником параболічності h, $0<h\le p$.

За умови, що

$$0\le p_1 < \begin{cases} h - n(1-h\mu/p_0), & 0<\mu\le 1, \\ h-n(1-\mu), & \mu\le 0 \end{cases}$$

(тут μ – рід рівняння (2), а p_0 – зведений порядок цього рівняння), побудовано фундаментальний розв'язок Z задачі Коші для рівняння (1) та встановлено, що цей розв'язок має властивості, характерні для випадку параболічних за Шиловим рівнянь, зокрема:

1) *функція $Z(t,x;\tau,\xi)$ є диференційовною за змінною t, нескінченно диференційовною за кожною із просторових змінних x і ξ на множині $\Pi_T^2 := \{(t,x;\tau,\xi) \mid 0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n\}$, причому*

$$\exists\,\delta>0 \quad \forall\,\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n \quad \exists\, c>0 \quad \forall\,(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2:$$

$$|\partial_\xi^r\partial_x^q Z(t,x;\tau,\xi)| \le c(t-\tau)^{-\frac{n+|r+q|_*}{h}} e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad \alpha := \begin{cases} \mu/h, & \mu\le 0, \\ \mu/p_0, & \mu>0; \end{cases}$$

2) *виконується граничне співвідношення*

$$Z(t,x;\tau,\cdot)\underset{t\to\tau+0}{\longrightarrow}\delta(\cdot - x)$$

у розумінні слабкої збіжності в просторі S' розподілів Шварца (тут $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака).

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ З АНІЗОТРОПНОЮ ЗМІННОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Олена В. Доманська
Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна
e-mail: olena.domanska@gmail.com

Нехай $n, m \in \mathbb{N}$; Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. Нехай M – підмножина множини $\{0,1,\ldots,m\}$ така, що $\{0,m\} \subset M$. Позначаємо через N_M кількість мультиіндексів $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, довжини яких $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ є елементами множини M, а через $\delta_M u$ — вектор, компонентами якого є похідні $D^\alpha u$, $|\alpha| \in M$, функції u.

Нехай $p = (p_\alpha : |\alpha| \in M)$ – векторна функція така, що $p_\alpha \in L_\infty(\Omega)$ і $p_\alpha(x) > 1$ $(|\alpha| \in M)$ для майже всіх $x \in \Omega$. Через $p^* = (p^*_\alpha : |\alpha| \in M)$ позначаємо векторну функцію таку, що $\frac{1}{p_\alpha(x)} + \frac{1}{p^*_\alpha(x)} = 1$ $(|\alpha| \in M)$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Нехай (a_α) – набір з N_M функцій таких, що

1) $\forall\ \alpha, |\alpha| \in M,$ функція $a_\alpha(x,\xi)$, $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^{N_M}$, є каратеодорівською;

2) для м. в. $x \in \Omega$, будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^{N_M}$ та довільних α, $|\alpha| \in M,$ маємо

$$|a_\alpha(x,\xi)| \le h_\alpha(x) \sum_{|\beta| \in M} |\xi_\beta|^{p_\beta(x)/p^*_\alpha(x)} + g_\alpha(x),$$

де $h_\alpha \in L_\infty(\Omega)$, $g_\alpha \in L_{p^*_\alpha(\,\cdot\,)}(\Omega)$;

3) $\exists$ сталі $K_\alpha > 0$, $|\alpha| \in M,$ такі, що для м. в. $x \in \Omega$ та довільних $\xi \in \mathbb{R}^{N_M}$

$$\sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \ge K_\alpha |\xi_\alpha|^{p_\alpha(x)}.$$

Нехай $f_\alpha \in L_{p^*_\alpha(\,\cdot\,)}(\Omega)$, $|\alpha| \in M.$ Під $\mathbb{U}_p$ розуміємо замикання простору $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|v\| = \sum\limits_{|\alpha| \in M} \|D^\alpha v\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(\Omega)}$ (див. [1]).

Нехай $F(x\,;\cdot) : \mathbb{U}_p \to \mathbb{R}$ – лінійний неперервний функціонал для майже кожного $x \in \Omega$ і $F(\cdot\,;v) \in L_{p^*_0(\,\cdot\,)}(\Omega)$ для довільної функції $v \in \mathbb{U}_p$.

Розглядаємо задачу: знайти функцію $u \in \mathbb{U}_p$ таку, що

$$\int_\Omega \Big[\sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x,\delta_M u)\, D^\alpha \psi(x) + F(x; u(\cdot))\psi(x) \Big]\, dx = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \in M} f_\alpha(x) D^\alpha \psi(x)\, dx \quad \forall\ \psi \in \mathbb{U}_p.$$

За певних умов на вихідні дані нами доведено коректність даної задачі.

1. Kováčik O., Rákosnı́c J., *On spaces* $L^{p(x)}(\Omega)$ *and* $W^{1,p(x)}$, Czechosl. Math. J., 1991, **41**, №4, 592-618.

КЛАСИЧНІ ТА УЗАГАЛЬНЕНІ НЕЛОКАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕГЛАДКИМИ СИМВОЛАМИ

Ярослав М. Дрінь
Буковинська державна фінансова академія,
Чернівці, Україна
e-mail: drin_jaroslav@i.ua

У доповіді наводяться результати дослідження класичної і узагальненої розв'язності нелокальних багатоточкових задач для одного класу псевдодиференціальних рівнянь, що містять псевдодиференціальну операцію (ПДО), побудовану за негладкими в нулі символами, незалежними від просторових змінних вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\zeta=0}^{p} (A_\zeta u)(t,x) = f(t,x), \quad 0 < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mu u(0,x) = \sum_{k=1}^{m} \nu_k u(t_k, x) + \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$0 \le t_1 < \cdots < t_m = T$, $0 < \nu_1 < \cdots < \nu_m = 1$, f, φ – відомі функції, що задовольняють умови існування розв'язку даної задачі і запису його у вигляді суми згорток.

Символи $a_\zeta(t,\sigma)$, ПДО A_ζ, $0 \le \zeta \le p$, є однорідними по $\sigma \in \mathbb{R}^n$ степеня γ_ζ, де $\gamma_0 > \gamma_1 > \cdots > \gamma_p \ge 1$, трактуються як гіперсингулярні інтеграли [1].

Встановлено формули класичної розв'язності і доведено теореми про коректну розв'язність даної задачі в просторах узагальнених функцій типу розподілів. Основні результати наведені в працях [2], [3], [4], [5].

1. Кочубей А.Н., *Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы*, Изв. АН СССР. Сер. мат., 1988, **52**, № 5, 909-934.
2. Дрінь М.М., Дрінь Я.М., *Зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічного псевдодиференціального рівняння з негладкими символами*, Proceedings of the Sixteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. **16** (KROMSH – 2005, September 18-29), 2006, 33-37.
3. Городецький В.В., Дрінь Я.М., *Задача Діріхле для одного класу еволюційних рівнянь*, // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 336-337. Математика, Чернівці: Рута, 2007, 63-77.
4. Дрінь Я.М. *Багатоточкова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь*, Доповіді НАНУ, № 7, 2010, 7-11.
5. Дрінь Я.М. *Нелокальна багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 501. Математика, Чернівці: ЧНУ, 2010, 24-32.

ОБ ОПЕРАТОРНОМ ПОДХОДЕ К ЗАДАЧЕ О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ И НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ольга А. Дудик

Таврический нициональный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина

e-mail: dudik_tnu@mail.ru

Рассматривается линейная задача гидродинамики, связанная с колебаниями системы “маятник-вязкая жидкость”, в условиях, близких к невесомости. Известно, что в условиях невесомости или близких к ним при рассмотрении проблемы колебаний жидкости, заполняющей сосуд, следует учитывать капиллярные (поверхностные) силы, действующие на границах раздела “жидкость-газ”, “жидкость-твердое тело”, “газ-твердое тело”.

Особенностью этой начально-краевой задачи является то обстоятельство, что при ее постановке производные по времени от решения входят не только в уравнения Навье-Стокса, но и в граничное (кинематическое) условие. Кроме того, ввиду действия капиллярных сил порядок дифференциального оператора (Лапласа-Бельтрами) на равновесной поверхности жидкости – такой же, как и в основных уравнениях. Эти обстоятельства усложняют исследования данной проблемы. При этом соответствующая задача о нормальных движениях, т. е. решениях, зависящих от времени t по закону $e^{-\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ приводит к несамосопряженной спектральной проблеме. Задача о малых движениях гидромеханической системы изучается с помощью операторных методов, теории краевых задач математической физики, теории дифференциально-операторных уравнений в гильбертовых пространствах. Основным методом, который используется при исследовании задачи, является операторный подход, базирующийся на двух вспомогательных задачах С.Г. Крейна и абстрактной формуле Грина. При помощи предложенного метода удается перейти от начально-краевой проблемы о малых движениях пространственного (трехмерного) маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью, к системе дифференциально-операторных уравнений в ортогональной сумме гильбертовых пространств, а затем к задаче Коши для абстрактного параболического уравнения в гильбертовом пространстве. На этой основе при определенных условиях доказывается существование и единственность сильного решения начально-краевой задачи.

При условии статической устойчивости по линейному приближению исследована структура спектра нормальных колебаний гидромеханической системы, получены утверждения о дискретности спектра и его локализации, приведена асимптотика собственных значений. Доказано, что система корневых элементов образует базис Абеля-Лидского по норме графика либо с точностью до конечного дефекта в пространстве с нормой графика. Для случая, когда условие статической устойчивости не выполнено, и оператор потенциальной энергии имеет конечное число отрицательных собственных значений, доказано обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.

СЛАБО ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ С ПАРАМЕТРОМ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Андрей В. Заворотинский
Черниговский национальный педагогический университет имени Т.Г. Шевченко, Чернигов, Украина
e-mail: zavorot@chgpu.cn.ua

Изучаемая в настоящей работе задача формулируется следующим образом. На многообразии G с гладкой границей $\partial G \in \mathbb{C}^\infty$ рассматривается краевая задача для эллиптического оператора порядка $2m$:

$$A(x, D, \lambda)u(x) = f(x), \quad x \in G, \tag{1}$$

$$B_j(x', D)u(x') + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x', D')\sigma_k(x') = g_j(x'), \quad x' \in \partial G, \quad (j = 1, \ldots, m + \varkappa), \tag{2}$$

где оператор в (1) полиномиально зивисит от параметра λ:

$$A(x, D, \lambda) := A_{2m}(x, D) + \lambda A_{2m-1}(x, D) + \ldots + \lambda^{2\mu} A_{2m-2\mu}(x, D).$$

В случае $\mu = 0$ задача (1), (2) переходит в задачу, изученную М.С. Аграновичем и М.И. Вишиком [1]. Обобщил и придал современный вид этой теории Л.Р. Волевич [3] (там же см. библиографию). В работе определяются слабо эллиптические и правильно слабо эллиптические с параметром и дополнительными неизвестными функциями на границе задачи и полученны оценки на фундаметальные решения. Вывод оценок основан на конструкции экспоненциального пограничного слоя, предложенной в классической работе М.И. Вишика и Л.А. Люстерника [2]. Полученные оценки позволяют получить априорные оценки, равномерные относительно параметра. Схема исследования аналогична предложенной в работе Л.Р. Волевича [3].

Данный класс задач тесно связан с задачами для 2b-параболических операторов, неразрешённых относительно старшей производной по времени. Следуя работе [4] такие задачи называються псевдопараболическими. Исходный оператор в этом случае имеет вид

$$A(y, D_x, D_t) = A_{2m}(y, D_x) + A_{2m-2b}(y, D_x)D_t + \ldots + A_{2\mu}(y, D_x)D_t^p$$

где $2m - 2\mu = 2bp$. В данном случае комлексный параметр τ заменим на параметр $\lambda = \tau^{1/2b}$, пробегающий некоторый угол на комплекной плоскости с вершиной в начале координат. Интересующему нас случаю полуплоскости $\{\operatorname{Im} \tau < 0\}$ отвечает угол $V := \{\lambda \in \mathbb{C},\ \frac{\pi}{2b} < \arg \lambda < \frac{\pi}{b}\}$.

1. Агранович М.С., Вишик М.И., *Эллиптические краевые задачи с параметром и параболические задачи общего вида*, Успехи мат. наук, 1964, **19**, Вып. 3, 43-161.
2. Вишик М.И., Люстерник Л.А., *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром*, Успехи мат. наук, 1957, **12**, Вып. 5, 3-122.

3. Волевич Л.Р., *Метод Вишика-Люстерника в эллиптических задачах с малым параметром*, Труды московского математ. общества, 2006, **67**, 104-147.
4. Демиденко Г.В., Успенский С.В., *Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной*, Новосибирск, 1998.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТА АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКОЇ СИНГУЛЯРНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ

Олександр Є. Зернов[1]**, Юлія В. Кузіна**[2]

[1] *Південноукраїнський національний педогогічний університет імені К.Д. Ушинського,*

[2] *Одеський інститут фінансів Українського державного університету фінансів та міжнародної торгівлі*

м. Одеса, Україна

e-mail: yuliak@te.net.ua

Якісними методами досліджується сингулярна задача Коші

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad x(0) = 0,$$

де $F : D \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, $x : (0, \sigma) \to \mathbb{R}$, $\sigma \in (0, \tau)$. Розв'язком даної задачі називається неперервно диференційовна функція, яка тотожно задовольняє диференціальне рівняння, яке розглядається, при всіх $t \in (0, \rho)$, а також задовольняє умову

$$\lim_{t \to +0} x(t) = 0.$$

Формулюються достатні умови, при виконанні яких у даної задачі Коші існує непорожня множина розв'язків $x : (0, \sigma) \to \mathbb{R}$ (σ – достатньо мале) з відомими асимптотичними властивостями при $t \to +0$. Визначається кількість таких розв'язків. Наводяться приклади, які ілюструють одержані результати.

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ТА ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Микола І. Іванчов

Львівський національний університет імені Івана Франка,

Львів, Україна

e-mail: ivanchov@franko.lviv.ua

У доповіді йдеться про розвиток у Львівському університеті теорії обернених задач для параболічних рівнянь та її застосування до розв'язування задач з вільними межами. Обговорюється також питання коректності обернених задач для рівнянь з виродженням.

1. Jones B.F., *The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. Part I. Existence and uniqueness,* J. Math. Mech., 1962, **11**, №6, 907-918.
2. Ivanchov M., *Inverse Problems for Equations of Parabolic Type*, Mathematical Studies. Monograph Series. **10**, Lviv: VNTL Publishers, 2003.

3. Ivanchov M., Lorenzi A., Saldina N., *Solving a scalar degenerate multidimensional identification problem in a Banach space*, J. Inv. Ill-Posed Problems, 2008, **16**, №4, 397-415.
4. Ivanchov M., Saldina N., *An inverse problem for a strongly degenerate heat equation*, J. Inv. Ill-Posed Problems, 2007, **14**, №5, 465-480.
5. Березницька І., Дребот А., Макар Ю. *Обернені задачі для рівняння теплопровідності з нелокальними та інтегральними умовами*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1999, **54**, 27-37.
6. Березницька І., *Обернена задача для параболічного рівняння з нелокальною умовою перевизначення*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2001, **49**, №1, 54-62.
7. Березницька І., *Обернена задача визначення вільного члена в параболічному рівнянні загального вигляду*, Мат. студії, 2002, **18**, №2, 169-176.
8. Березницька І., *Визначення вільного члена і старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні*, Укр. мат. журн., 2003, **55**, №1, 119-125.
9. Березницька І., *Обернена задача визначення двох коефіцієнтів в параболічному рівнянні з нелокальними умовами*, Мат. студії, 2003, **19**, №2, 217-224.
10. Пабирівська Н., *Теплові моменти в оберненій задачі для параболічного рівняння*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 2000, **56**, 142-149.
11. Федусь У. *Обернена задача для загального параболічного рівняння з невідомим коефіцієнтом теплоємності*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2006, **49**, №4, 40-48.
12. Федусь У. *Ідентифікація коефіцієнта при похідній за часом у квазілінійному параболічному рівнянні*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2009, **53**, №1, 20-33.
13. Салдіна Н. *Обернена задача для параболічного рівняння зі слабким виродженням*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2006, **49**, №3, 7-17.
14. Іванчов М., Салдіна Н. *Обернена задача для рівняння теплопровідності із сильним виродженням*, Укр. мат. журн., 2006, **58**, №11, 1487-1500.
15. Іванчов М., *Обернена задача теплопровідності в анізотропному середовищі*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2000, **43**, №1, 45-50.
16. Іванчов М., Сагайдак Р., *Обернена задача визначення невідомого старшого коефіцієнта в двовимірному параболічному рівнянні*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2004, **47**, №1, 7-16.
17. Баранська І., *Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2005, **48**, №2, 32-42.
18. Баранська І., Іванчов М., *Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільною межею*, Укр. мат. вісник, 2007, **4**, №4, 457-484.
19. Гринців Н., *Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням в області з вільною межею*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2007, **48**, №2, 32-42.
20. Гринців Н., *Обернена задача для параболічного рівняння із сильним виродженням в області з вільною межею*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 2007, **64**, 84-97.
21. Іванчов М., *Обернена задача теплопровідності в області з вільною межею, що вироджується в початковий момент часу*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2007, **50**, №3, 82-87.
22. Снітко Г., *Обернена задача для параболічного рівняння з невідомим молодшим коефіцієнтом в області з вільною межею*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 2008, **68**, 231-245.

ПРО ВПЛИВ ІДЕЙ Я.Б. ЛОПАТИНСЬКОГО НА РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Степан Д. Івасишен
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", Київ, Україна
e-mail: ivasyshen_sd@mail.ru

У доповіді аналізуються праці з теорії параболічних систем, в яких одержали розвиток ідеї Я.Б. Лопатинського [1], пов'язані з побудовою і дослідженням фундаментальних матриць розв'язків загальних еліптичних систем та знаменитою умовою Лопатинського (Шапіро–Лопатинського, доповняльності) в теорії еліптичних крайових задач. Робиться огляд в першу чергу праць [2-8].

1. Лопатинский Я.Б., *Теория общих граничных задач.* Избр. тр., Киев: Наук. думка, 1984.
2. Загорский Т.Я., *Смешанная задача для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа*, Львов, 1961.
3. Эйдельман С.Д., *Параболические системы*, М.: Наука, 1964.
4. Эйдельман С.Д., *Параболические уравнения*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники, М.: ВИНИТИ, 1990, **63**, 201-313.
5. Агронович М.С., Вишик М.И., *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида*, Успехи мат. наук, 1964, **19**, №3, 53-161.
6. Солонников В.А., *О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида*, Тр. мат. ин-та АН СССР, 1965, **83**, 1-163.
7. Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д., *Параболические граничные задачи*, Кишинёв: Штиинца, 1992.
8. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N., *Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type*, Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2004. (Operator Theory: Advances and Applications, **152**).

ПРО ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ СОНІНА ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Степан Д. Івасишен, Галина С. Пасічник
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", Київ, Україна
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: ivasyshen_sd@mail.ru, pasichnyk@mail.ru

Доповідь присвячена задачі Коші для одного узагальнення модельного рівняння Соніна [1], яке полягає в тому, що кількість просторових змінних у кожній із трьох груп є, взагалі кажучи, різною і в рівняння входять молодші члени, коефіцієнти яких необмежено зростають на нескінченності.

Рівняння, яке розглядається, має вигляд

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}}\right) u(t,x) - b\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{x_{1j}}(x_{1j}u(t,x)) = 0,$$

$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де n_1, n_2, n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \geq n_2 \geq n_3$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$, $x := (x_1, x_2, x_3)$, $x_j := (x_{j1}, x_{j2}, ...x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$; a_{js}, b – задані дійсні числа, причому $a_{js} = a_{sj}$.

Для рівняння (1) знайдено явну формулу для фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК), за допомогою якої встановлено точні оцінки ФРЗК та всіх його похідних, а також різні його властивості. На основі цих властивостей досліджено коректну розв'язність задачі Коші.

Одержані результати будуть використані (аналогічно до [2, розділ 3]) для побудови та вивчення властивостей ФРЗК для узагальненого рівняння Соніна з коефіцієнтами, залежними від усіх змінних.

1. Сонин И.М., *Об одном классе вырождающихся диффузионных процессов*, Теория вероятн. и ее примен., 1967, **12**, №3, 540-547.
2. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N., *Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type*, Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2004. (Operator Theory: Advances and Applications, **152**).

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЧАТКОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО УЗАГАЛЬНЕНОГО КЛАСУ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Галина П. Івасюк
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: gala_ ivasiyk@mail.ru

Параболічні системи диференціальних рівнянь із частинними похідними, які були введені І.Г. Петровським, є досить широким класом систем, порівняно добре вивченим на даний час. Дослідження таких систем відбувались у різних напрямках. Зокрема, в різноманітних функціональних просторах встановлювалась коректна розв'язність крайових та початкових задач для таких систем, узагальнювалось означення параболічності системи за І.Г. Петровським.

У даній доповіді наводяться основні результати, одержані при дослідженні початкових задач для одного узагальненого класу параболічних систем – параболічних систем Солонникова–Ейдельмана. Цей клас містить у собі параболічні за Солонниковим системи (випадок узагальнення параболічних за Петровським систем, коли порядок оператора, який діє на невідому функцію u_j у рівнянні з номером k, може залежати як від j, так і від k) і системи, параболічні в розумінні Ейдельмана (випадок, коли диференціювання за різними просторовими змінними мають, взагалі кажучи, різну вагу відносно диференціювання за часовою змінною, тобто мають векторну параболічну вагу $\overrightarrow{2b} := (2b_1, \ldots, 2b_n)$).

Вивчення початкових задач для параболічних систем Солонникова-Ейдельмана проводиться у просторах Гельдера швидкозростаючих функцій [1] та для одного вужчого класу таких задач – у відповідних узагальнених просторах Соболєва [2]. Доведено теореми про коректну розв'язність цих задач у вищезгаданих просторах.

1. Івасишен С.Д., Івасюк Г.П., *Коректна розв'язність параболічних початкових задач Солонникова-Ейдельмана*, Укр. мат. журн., 2009, **61**, №5, 650-671.
2. Івасишен С.Д., Івасюк Г.П., *Про коректну розв'язність параболічних початкових задач Солонникова-Ейдельмана в узагальнених просторах Соболєва*, Доп. НАН України., 2010, №10.

НЕЛОКАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ З АЛГЕБРИЧНО ЗАЛЕЖНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Володимир С. Ільків [1,2], Іван Я. Савка [2], Михайло М. Симотюк [2]

[1] *НУ "Львівська Політехніка",*

[2] *ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України,*

Львів, Україна

e-mail: ilkivv@i.ua, s-i@ukr.net, quaternion@ukr.net

У роботі [1] вивчено питання розв'язності задачі з нелокальними за часовою змінною t умовами для рівняння з частинними похідними нескінченного порядку

$$z_0 \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + z_1 \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n} + \ldots + z_p \frac{\partial^n u}{\partial x_p^n} + \sum_{|\widehat{s}|=0}^{\infty} a_{\widehat{s}} \frac{\partial^{|\widehat{s}|} u}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} = f(t, x), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0} - \mu \frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=T} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

в області $\mathcal{D}^p = (0, T) \times \Omega_p$, де $T > 0$, Ω_p – p-вимірний тор, коефіцієнти $z_0, z_1, \ldots, z_p$, $a_{\widehat{s}}$ і параметр μ ($\mu \neq 0$) – комплексні числа, $n \in \mathbb{N}$.

У припущенні *незалежності коефіцієнтів* $z_0, z_1, \ldots, z_p$ рівняння (1) встановлено вкладення між соболєвськими просторами нескінченного порядку $W^\infty\{a_{\widehat{s}}\}$ і просторами скінченого порядку W^q, де $q \in \mathbb{R}$, яке для майже всіх (стосовно індукованої міри Лебега в $\mathbb{C}^{p+1}$) векторів $(z_0, z_1, \ldots, z_p)$ забезпечує доведення розв'язності задачі (1)-(2) у шкалі просторів W^q на підставі розв'язності у просторі $W^\infty\{a_{\widehat{s}}\}$. Ці вкладення безпосередньо не поширюються на випадок *залежних коефіцієнтів* $z_0, z_1, \ldots, z_p$.

У роботі встановлено клас функціональних просторів, для яких доведено теорему вкладення у випадку *алгебричної залежності*

$$R(z_0, z) = 0 \tag{3}$$

коефіцієнтів $z_0, z_1, \ldots, z_p$, де R – комплексний многочлен степеня $d \geq 1$.

Зокрема, показано, що умова (3) вимагає запровадження просторів (нескінченного порядку) експоненціального типу $W^{\sigma}_{\beta_1,\beta_2}$ замість просторів скінченного порядку W^q. Із теореми вкладення випливає твердження про розв'язність задачі.

Теорема. *Якщо $L(z_0, z)$ є цілою функцією скінченного порядку σ, то для всякої функції $f \in W^{\sigma}_{\delta,d-1}$ існує єдиний розв'язок задачі (1)-(3) із простору $W^{\sigma}_{-\delta,1-d}$ для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^p$) векторів $(z_1, \ldots, z_p)$, де показник δ залежить від степеня многочлена R та розмірності вектора x*, тобто $\delta = \delta(d, p)$.

1. Ильків В.С. *Нелокальная краевая задача для уравнений в частных производных бесконечного порядка*, Укр. мат. журн., 1983, **35**, № 4, 498-502.

АНАЛОГ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ НІКОЛЕТТІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ ТА ГОРИЗОНТАЛЬНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Володимир М. Кирилич [1], **Андрій М. Філімонов** [2]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна*

[2] *Московський державний університет шляхів сполучення, Москва, Росія*

e-mail: vkyrylych@ukr.net, afilimonov@yandex.ru

У прямокутнику $\Pi(T_0) = \{(x,t) |\ 0 \leq x \leq \ell,\ 0 \leq t \leq T_0\}$ з невідомими внутрішніми межами розглянуто задачу для виродженої гіперболічної системи квазілінійних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{m} g^i_k(x,t,u,v)\left(\frac{\partial u_k}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u,v)\frac{\partial u_k}{\partial x}\right) = f_i(x,t,u,v), \quad i \in \{1,...,m\}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x,t,u,v), \quad j \in \{1,...,n\}, \tag{2}$$

$$\frac{ds_j}{dt} = r_j(s(t), t, u(s_j(t),t), v(s_j(t),t)), \quad j \in \{1,...,n\}. \tag{3}$$

$$u = (u_1, ..., u_m), \quad v = (v_1, ..., v_n), \quad s = (s_1, ..., s_n),$$

з умовами

$$u(x, 0) = \alpha(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \tag{4}$$

$$s_j(0) = c_j, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \quad 0 \leq c_j \leq \ell, \tag{5}$$

$$u_i(0,t) = \gamma^0_i(t, u(0,t), v(0,t)), \quad i \in I^0_+ = \{i \mid \mathrm{sgn}(\lambda_i(0,0,0,0)) = 1\}, \tag{6}$$

$$u_i(\ell,t) = \gamma_i^\ell(t, u(\ell,t), v(\ell,t)), \quad i \in I_-^\ell = \{i \mid \operatorname{sgn}(\lambda_i(\ell,0,0,0)) = -1\}, \tag{7}$$

$$v_j(s_j(t),t) = \beta_j(t), \quad j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{8}$$

Методом характеристик за допомогою принципу стискуючих відображень одержано локальну та глобальну узагальнену неперервну розв'язність поставленої задачі. Подібні задачі виникають в багатьох проблемах природознавства [1].

1. Кирилич В.М., Филимонов А.М. *Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений*, Матем. студії, 2008, **30**, № 1, 42-60.

РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Евгения В. Кириченко
Институт прикладной математики и механики НАНУ, Донецк, Украина
e-mail: yekirichenko@gmail.com

В настоящей работе исследуется проблема разрешимости неоднородной задачи Дирихле в ограниченной области для скалярного неправильно эллиптического дифференциального уравнения с комплексными коэффициентами. Рассмотрен модельный случай: в качестве области выбран единичный круг, а уравнение не содержит младшие члены. Охарактеризованы классы данных Дирихле, для которых задача имеет единственное решение в обычном пространстве Соболева. Установлено, что такими классами являются пространства функций с экспоненциальным убыванием коэффициентов Фурье.

ПРО ЗАДАЧУ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Марина І. Конаровська
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: mmi_marina@mail.ru

Встановлюється коректна ров'язність задачі без початкових даних для квазілінійної сингулярної параболічної системи.

Нехай $Q = (-\infty, T) \times \Omega^+$, $\Omega^+ = \Omega \times (0, +\infty)$, Ω – обмежена область $(n-1)$-вимірного простору з межею S, $S^+ = S \times (0, +\infty)$, $\Gamma = (-\infty, T) \times S^+$. В області Q розглядається квазілінійна сингулярна параболічна система

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{|k|+2j\le 2}a_{kj}(t,x)\mu^{2-|k|-2j}D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}u+F_0(t,x,u) \qquad (1)$$

з крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0}=0,\quad \left.\sum_{|k|+2j\le r_m}b_{kjm}(t,x)D_{x'}B_{x_n}u\right|_{\Gamma}=F_m(t,x,u), \qquad (2)$$

де

$$B_{x_n}=\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}+\frac{2\nu+1}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n},\ \ \nu\ge-\frac{1}{2},\ \ x'=(x_1,\dots,x_{n-1}),\ \ 0\le r_m\le 1,\ \ m=\overline{1,N}.$$

Розв'язок задачі (1)-(2) зображається у вигляді

$$u(t,x)=\int_{-\infty}^{t}d\tau\int_{\Omega^+}G_0(t,x;\tau,\xi)F_0(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\xi_n^{2\nu+1}d\xi+$$

$$+\sum_{m=1}^{N}\int_{-\infty}^{t}d\tau\int_{\Gamma^+}G_m(t,x;\tau,\xi)F_m(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\xi_n^{2\nu+1}d\xi.$$

Функція $G_0(t,x;\tau,\xi)$ є додатною, для неї правильною є формула згортки [1] та виконується умова Λ_ω з $\omega<0$ [2]. Для встановлення коректності задачі (1)-(2) вводиться спеціальним чином норма [1]:

$$||\varphi||_Q=\sup_{(t,x)\in Q}\frac{|\varphi(t,x)|}{G_0(t,x;-\chi,0)},\quad \chi>0.$$

Якщо система (1) B-параболічна, виконуються умови на гладкість даних задачі, умови доповнення та узгодження [3], то існує єдиний розв'язок задачі (1)-(2), який належить класу $\widetilde{H}^{2+\alpha}(Q)$ [1]. Коректність одержується за рахунок малості норми функція $u(t,x)$ в точці t_0, $-\infty<t_0<T$, або за рахунок достатньо великого параметра μ.

1. Матійчук М.І. *Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями*, Чернівці: Прут, 2003.
2. Масікевич М.І., Матійчук М.І. *Оцінка матриці Гріна в чверті простору B-параболічної системи з імпульсною дією*, Наук. вісн. Чернівецького нац. ун-ту: Збірник наук. праць. Математика, **374**, 2008, 88-95.
3. Лавренчук В.П., Матийчук М.И. *Глобальная разрешимость граничной задачи для квазилинейных параболических систем и задач без начальных условий*, Укр. мат. журн., 1982. **34**, № 6, 710-717.

СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ФРАГМЕНТІВ СІТОК ТА РЕШІТОК

Анастасія С. Крилова
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
e-mail: krylovaas@univ.kiev.ua

При аналізі моделей різноманітних коливань крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку на відрізку є одним з основних понять. До цих рівнянь приводять багато задач фізики та механіки. Такі рівняння використовують, зокрема, при розрахунку динамічної стійкості пружних систем, сіток та решіток.

Розглянемо спектральну задачу для фрагментів сіток та решіток, які моделюють коливання сіток та решіток зі струн. Змоделюємо фрагменти періодичних сіток та решіток у формі двовимірного та тривимірного струнного хреста відповідно. Дослідження спектральних властивостей отриманих моделей проводимо за допомогою систем лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. Дослідимо поведінку струн на хресті, який є фрагментом періодичної сітки. Модель "струнний хрест", вивчений з іншими граничними умовами в [1], складається з двох однакових однорідних натягнутих струн одиничної довжини, розташованих в одній площині під прямим кутом відносно одна одної та мають спільну середину, де вони зв'язані. На цьому хресті розглядається спектральна задача вигляду $-v'' = \lambda v$ з крайовими умовами періодичності та а-періодичності, умовами контакту, а саме умовою зв'язку вузлів, та умовою балансу натягу у спільному вузлі.

Виходячи з твердження, що кожне плече хреста є також струною, розглядаємо систему з чотирьох функцій. Для періодичної задачі отримаємо розв'язок у вигляді власних функцій вигляду $v_k = A\cos 2\pi nx + C_l \sin 2\pi nx$ при довільних константах (A, C_l) $(k = 1, ..., 4;\ l = 1, 2)$, тобто будь який розв'язок можна отримати у вигляді лінійно незалежної комбінації функцій. Аналогічним чином робимо висновок для а-періодичної задачі, де маємо розв'язок у вигляді $v_k = A_l \cos(2n-1)\pi x + C\sin(2n-1)\pi x$ при довільних константах (A_l, C) $(k = 1, .., 4;\ l = 1, 2)$. Для тривимірної системи струн маємо ті ж результати з $k = 1, ..., 6$ та $l = 1, 2, 3$.

Таким чином, розглянута модель "струнний хрест" та описані власні простори на ньому.

Подальше продовження дослідження вбачається у використанні отриманих результатів на фрагментах мереж та решіток для спектру всієї мережі та решітки методом усереднення, що розглянутий у [3] та [4].

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
2. Мазья В.Г. Слуцкий А.С. *Осреднение разностных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами*, Seminar Analysis Operator equat. and numerical analysis 1986/87, Karl-Weierstrab-Institut für Mathematik, Berlin, 1987, 63-92.
3. Сандраков Г.В., *Принципы осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами*, Матем. сб., 1989, **180: 12**, 1634-1679.

ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КОЛМОГОРІВСЬКОГО ТИПУ

В.І. Лагно, В.І. Стогній, М.В. Кувіка
ПНПУ імені В.Г. Короленка,
Полтава, Україна,
НТУУ "КПІ",
Київ, Україна
e-mail: lvi@pdpu.poltava.ua, valeriy_stogniy@mail.ru

Розглянуто нелінійне рівняння колмогорівського типу

$$u_t - u_{xx} - uu_y = f(u), \tag{1}$$

де $u = u(t, x, y)$, $f(u)$ – довільна неперервна функція. Широкі застосування рівняння (1) в задачах фінансової математики, теорії дифузійних процесів, теорії стохастичного контролю [1; 2] викликають беззаперечний інтерес до отримання його точних розв'язків. Одним із конструктивних методів їх отримання є теоретико-груповий підхід до інтегрування рівнянь з частинними похідними.

Добре відомо [3], що коли нелінійне диференціальне рівняння з частинними похідними має нетривіальні симетрійні властивості, то це дозволяє використовувати базисні диференціальні оператори алгебри інваріантності для його симетрійної редукції до рівнянь меншої розмірності, які інколи вдається проінтегрувати.

Нами проведено повну групову класифікацію рівняння (1) й отримано всі значення функції $f(u)$, для яких досліджуване рівняння має нетривіальні симетрійні властивості. Основний класифікаційний результат подано нижче.

Теорема. У загальному випадку рівняння (1) є інваріантним відносно тривимірної алгебри Лі, базис якої формують оператори

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = \partial_x, \quad P_2 = \partial_y.$$

Розширення симетрії до чотиривимірної алгебри симетрії має місце для $f(u) = ae^{ku}$ та $f(u) = (au + b)^m$, де $a, b, k, m \in R$, $ak \neq 0$, $m \neq 0, 1, 2$; до п'ятивимірної алгебри інваріантності – для $f(u) = au + b$, $f(u) = (au + b)^2 + c$, де $a, b, c \in R$; $ac \neq 0$, а до шестивимірної – для $f(u) = (au + b)^2$, де $a, b \in R$.

1. Citti G.M., Pascucci A. *On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equations arising in mathematical finance*, Differential and Integral Equations, 2001, **14**, №6, 701-738.
2. Pascucci A., Polidoro S. *On the Cauchy problem for a nonlinear Kolmogorov equation*, SIAM J. Math. Anal., 2003, **35**, №3, 579-595.
3. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, М.: Наука, 1978.

ПОЧАТКОВО-КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЯК МОДЕЛЬ ПРОГРЕСУЮЧОГО РУЙНУВАННЯ АРМОВАНОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНОЇ СКЛАДКИ

Віктор М. Левін, Юрій В. Грицук, Володимир О. Митраков, Іван Г. Гевліч

Донбаська національна академія будівництва і архітектури, Макіївка, Україна

e-mail: nauka@telenet.dn.ua, yuri.gritsuk@gmail.com, igig2007@ukr.net

У роботі досліджується напружений стан складки замкнутого однозв'язного прямокутного перетину, затисненої на одному торці і завантаженої на іншому торці розподіленим стискаючим навантаженням, спочатку – тривалим, а потім – короткочас-

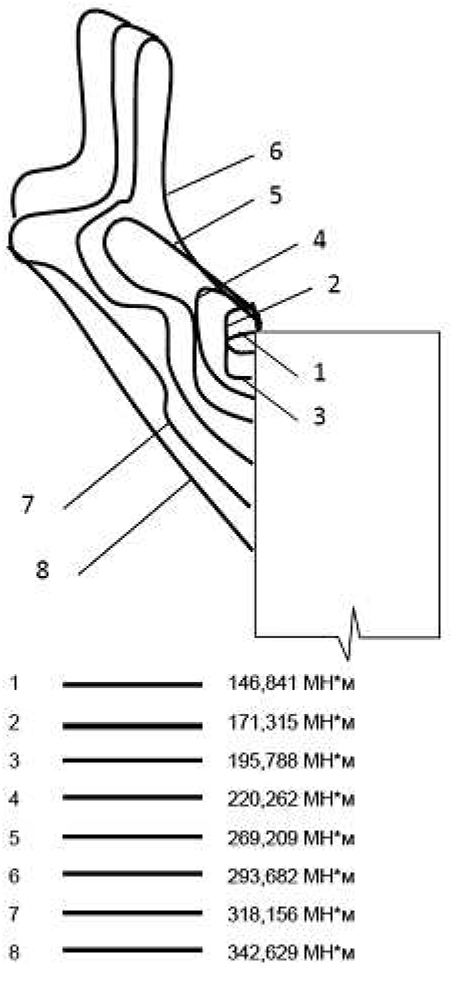

Рис. 1

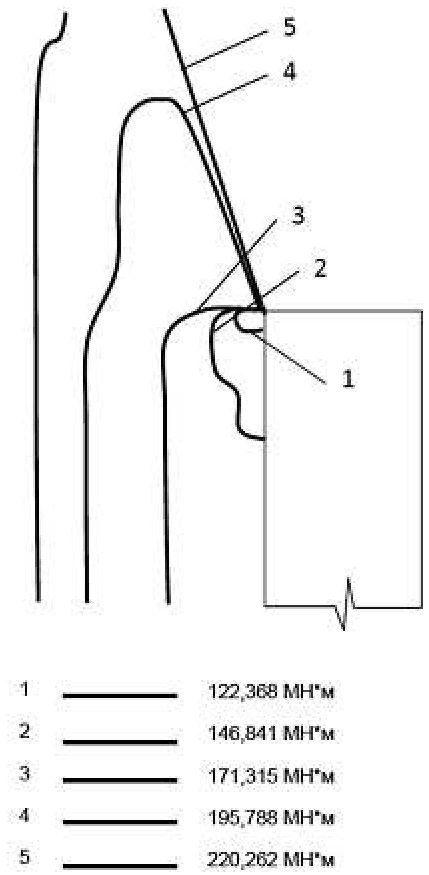

Рис. 2.

ним. Задача імітує роботу послаблених прорізами несучих стін баштової споруди при двоетапному навантаженні – на першому етапі власною вагою вищерозміщеної частини в процесі зведення зі швидкістю 6 м/добу і наступної "спокійної" експлуатації, і на другому етапі – вітровим напором. Складка виконана з в'язкопружнопластичного матеріалу, армованого рівномірно розподіленими пружнопластичними стержнями, орієнтованими уздовж вертикалі і горизонталі. Кількість арматури у колопрорізній зоні збільшено.

Поведінка бетону на першому етапі описується релаксаційними співвідношеннями [1] у вигляді:

$$F_x^{(b)}(t,\overline{x}) = F_x^{(be)}(t,\overline{x}) - \int_{\tau_0}^{t} F_x^{(be)}(\tau,\overline{x})\, R\left[t - r(\overline{x}), \tau - r(\overline{x})\right] d\tau, \tag{1}$$

$$F_y^{(b)}(t,\overline{x}) = F_y^{(be)}(t,\overline{x}) - \int_{\tau_0}^{t} F_y^{(be)}(\tau,\overline{x})\, R\left[t - r(\overline{x}), \tau - r(\overline{x})\right] d\tau, \tag{2}$$

де $R(t,\tau)$ – ядро релаксації; $F_i^{(be)}(t,\tau)$ – вектори "пружних" зусиль. Для короткочасного довантаження бетону прийнято спеціальний варіант деформаційної теорії пластичності, орієнтований на врахування особливостей деформативних властивостей бетону. Систему розв'язано методом дискретного продовження по параметру часу. На кожному кроці вирішується "пружна" задача методом ортогонального прогону. На рис. 1-2 наведена динаміка розвитку зон руйнування матриці і розриву розтягнутої арматури.

1. Левин В.М., Гудрамович В.С., Митраков В.А., Гевлич И.Г., Грицук Ю.В. *Напряженное состояние и прогрессирующее разрушение армированной вязкоупругопластической складки*, Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела, Материалы VI междунар. научн. конф. Донецк-Мелекино, 8-11 июня 2010 г., Донецк: Юго-Восток, 2010, 56-61.

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЛЕЖАНДРА-ФУР'Є-ЕЙЛЕРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$

Михайло П. Ленюк, Олег М. Ленюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

За допомогою одиничної функції Гевісайда сполучимо диференціальні оператори Лежандра

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + cth\, r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1 - ch\, r} + \frac{\mu_2^2}{1 + ch\, r}\right),$$

Фур'є $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ та Ейлера

$$B_\alpha^* = r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2\alpha + 1)r\frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2$$

в один гібридний диференціальний оператор (ГДО)

$$M_{(\mu),\alpha} = \Theta(r - R_0)\Theta(R_1 - r)\Lambda_{(\mu)} + \Theta(r - R_1)\Theta(R_2 - r)\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \Theta(r - R_2)B^*_\alpha. \qquad (1)$$

Оскільки ГДО $M_{(\mu),\alpha}$ самоспряжений та має одну особливу точку $r = \infty$, то його спектр дійсний і неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна вектор-функція

$$V_{(\mu),\alpha}(r,\beta) = \sum_{j=1}^{2} \Theta(r - R_{j-1})\Theta(R_j - r)V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta) + \Theta(r - R_2)V_{(\mu),\alpha;3}(r,\beta). \qquad (2)$$

Функції $V_{(\mu),\alpha;j}(r,\beta)$ будуються як лінійні комбінації фундаментальної системи розв'язків при відповідних крайових умовах та умовах спряження.

Наявність спектральної функції $V_{(\mu),\alpha}(r,\beta)$, вагової функції $\sigma(r)$ та спектральної щільності $\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)$ дозволяє визначити пряме $H_{(\mu),\alpha}$ й обернене $H^{-1}_{(\mu),\alpha}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині

$$I_2^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 > 0\}$$

ГДО $M_{(\mu),\alpha}$ за правилами:

$$H_{(\mu),\alpha}[g(r)] = \int_{R_0}^{\infty} g(r)V_{(\mu),\alpha}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \widetilde{g}(\beta), \qquad (3)$$

$$H^{-1}_{(\mu),\alpha}[\widetilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \widetilde{g}(\beta)V_{(\mu),\alpha}(r,\beta)\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)d\beta \equiv g(r), \qquad (4)$$

вектор-функція $g(r)$ належить області визначення ГДО $M_{(\mu),\alpha}$.

Математичним обґрунтуванням правил (3), (4) служить твердження.

Теорема (про інтегральне зображення). Якщо вектор-функція

$$f(r) = [\Theta(r - R_0)\Theta(R_1 - r)\sqrt{sh\, r} + \Theta(r - R_1)\Theta(R_2 - r)\cdot 1 + \Theta(r - R_2)r^{\alpha-1/2}]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині (R_0, ∞), то для будь-якого $r \in I_2^+$ справджується інтегральне зображення

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{R_0}^{\infty} g(\rho)V_{(\mu),\alpha}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\right)V_{(\mu),\alpha}(r,\beta)\Omega_{(\mu),\alpha}(\beta)\,d\beta. \qquad (5)$$

Наведені типові задачі математичної фізики неоднорідних середовищ.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧНІ ОБ'ЄКТИ МАГНІТНОГО ПОЛЯ

Віктор С. Лісняк
Київський університет імені Тараса Шевченка,
Київ, Україна
e-mail: v-lisnyak@univ.kiev.ua

Маємо деяку просторову (в E_3) дискретну систему Q постійних магнітів M_s з векторами намагніченості $\boldsymbol{m}_s$, прикладеними у точках A_s, де $s = 1, 2, 3, ..., n$. Тоді у кожній області $D \subset E_3$ виникає векторне поле $\boldsymbol{M}$ сумарного (магнітного) впливу системи Q. За ним у кожній точці $A \in D$ маємо свій вектор $\boldsymbol{M}(A)$. Досліджуватимемо поле $\boldsymbol{M}$ за тих (допустимих) значень вхідних параметрів Q та D, зокрема "віддаленостей" A від Q, за яких правильна векторна рівність $\boldsymbol{M}(A) = c\Sigma_{s=1}^{n}(\boldsymbol{m}_s/|\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_s|^2)$. Тут абсолютна стала c – деякий коефіцієнт розмірності, $\boldsymbol{r}_s$ – радіус-вектор точки A_s, а $\boldsymbol{r}_A$ – точки A.

Для довільного векторного поля $\boldsymbol{E}$ в E_3 можна взяти за супровідний ортонормований базис $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{A}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ – 0-репер для $\boldsymbol{E}$ – з векторними лінійними дериваційними рівняннями $d\boldsymbol{A} = \omega^k \boldsymbol{e}_k, \quad d\boldsymbol{e}_k = \omega_k^h \boldsymbol{e}_h$; $k, h = 1, 2, 3$ так, що $\boldsymbol{E}$ в $\boldsymbol{R}$ отримує локальне зображення $\boldsymbol{E}(A) \equiv \boldsymbol{e} = \lambda \boldsymbol{e}_3, \quad \lambda \equiv| \boldsymbol{e} |> 0$. Тоді вихідні диференціальні рівняння $\boldsymbol{E}$ у такому о.н.б. $\boldsymbol{R}$ набувають вигляду

$$\theta_\alpha \equiv -\omega_\alpha^3 + \alpha_{\alpha k}\omega^k = 0, \quad D\theta_\beta \equiv 0(mod\theta_\gamma); \quad \alpha, ... = 1, 2;$$

$$\Lambda \equiv -d\lambda + \lambda_h \omega^h = 0, \quad D\Lambda \equiv 0(mod\theta_\varepsilon, mod\Lambda); \quad \alpha, ... = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Якщо подати в $\boldsymbol{R}$ задіяні вектори як $\boldsymbol{m}_s = m_s^k \boldsymbol{e}_k$, $\boldsymbol{r}_A = 0$ та $\boldsymbol{r}_s = x_s^r \boldsymbol{e}_r$, то виходячи з $d\boldsymbol{E} = d(\lambda \boldsymbol{e}_3)$, де зараз $\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{M}$, дістаємо залежності

$$a_{\alpha h} = \Sigma \delta_{\alpha\beta} m_s^\beta x_s^h, \quad \lambda_h = -\Sigma m_s^3 x_s^h; \quad \Sigma \equiv c\Sigma_{s=1}^{n}. \tag{2}$$

Вони з'ясовують будову компонент $a_{\pi l}$ та λ_p фундаментального геометричного об'єкту першого порядку (ф.г.о.-1) $(a_{\sigma\tau}, \lambda_q)$ поля $\boldsymbol{M}$ як функцій від Q.

Тут використано рівності $d\boldsymbol{M} \approx \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A} + d\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})$, $(1 + \varepsilon)^{-1} \approx 1 - \varepsilon$, $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}) = -\Sigma_{s=1}^{n}(\boldsymbol{m}_s/r_s^2)$, $d\boldsymbol{r}_s = d\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A} + d\boldsymbol{A}) = \Sigma_{s=1}^{n}((\boldsymbol{r}_s^2 - \boldsymbol{r}_s \cdot d\boldsymbol{A})/r_s^4)$ та знехтувано величиною другого порядку малості $d\boldsymbol{r}_s \cdot d\boldsymbol{r}_s$, що й дозволило зрештою дістати рівність $d\boldsymbol{M} = -\Sigma_{s=1}^{n}(\boldsymbol{r}_s \cdot d\boldsymbol{A}/r_s^4)$.

Залучаються загальні диференціальні рівняння поля $\boldsymbol{E}$

$$\Theta_{\alpha i} \equiv da_{\alpha i} + a_{\beta i}\omega_\alpha^\beta + a_{\alpha j}\omega_i^j + a_{\alpha ik}\omega^k = 0, \quad a_{\alpha[ik]} = 0;$$

$$\lambda_i \equiv -d\lambda_i + \lambda_j \omega_i^j + \lambda_{ik}\omega^k = 0, \quad \lambda_{[ik]} = 0. \tag{3}$$

Вони вводять компоненти $a_{\gamma lp}$ та λ_{qw} ф.г.о.-2 $(a_{\pi q}, \lambda_b;\ a_{\varepsilon qw}, \lambda_{hl})$. Аналіз рівностей (3) і врахування попередніх диференціальних залежностей (1) та (2) приводять до обчислювальних формул і для функцій $a_{\gamma lp}$, λ_{qw} з істотно другого диференціального околу магнітного поля $\boldsymbol{M}$. Таким чином, фізичний зміст ф.г.о.-2 – повного об'єкту $\boldsymbol{M}$, що визначає локальну диференціальну геометрію поля $\boldsymbol{M}$ з точністю до довільних неперервних перетворень групи рухів у E_3, повністю з'ясовано.

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Галина П. Лопушанська, Олена В. Пасічник
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
e-mail: olena.pasichnyk@gmail.com

Нехай $Q_T = \{(x,t):\ x \in R^n,\ t \in (0;T]\}$, $\mathcal{E}(R^n) = C^\infty(R^n)$, $\mathcal{E}(\overline{Q}_T) = C^\infty(\overline{Q}_T)$, $D^0(\overline{Q}_T) = \{\varphi \in \mathcal{E}(\overline{Q}_T) : (\frac{\partial}{\partial t})^p \varphi|_{t=T} = 0,\ \ p = 0,1,2...\}$.

Через Φ' позначатимемо сукупність лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на просторі Φ, через (F,φ) – значення $F \in \Phi'$ на $\varphi \in \Phi$. Нехай $f_\lambda(t) = \dfrac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ при $\lambda > 0$, $f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t)$ при $\lambda \le 0$, де $\theta(t)$-одинична функція Хевісайда; оператор згортки $(f_{-\lambda}*)$ (при $0 < \lambda < 1$) є оператором дробового диференціювання Рімана-Ліувілля.

Нехай $\alpha \in (0;1)$. Позначимо через $C^{2,\alpha}(Q_T)$ клас функцій $v(x,t)$, двічі неперервно диференційовних за змінною x в Q_T, для яких існує неперервна згортка $f_{-\alpha}(t) * v(x,t)$.

Для $v \in C^{2,\alpha}(Q_T)$ визначено

$(L_\alpha v)(x,t) \equiv f_{-\alpha}(t) * v(x,t) - (Av)(x,t)$,

$(\widehat{L}_\alpha v)(x,t) \equiv f_{-\alpha}(t) \widehat{*} v(x,t) - (\widehat{A}v)(x,t),\ \ (x,t) \in Q_T$,

де A – рівномірно еліптичний диференціальний оператор з обмеженими в R^n коефіцієнтами, які задовольняють умову Гельдера,

$$Av = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + c(x)v,$$

$\widehat{A}$ – формально спряжений до A оператор,

$$f_{-\alpha}(t) \widehat{*} v(x,t) = -\int_0^{+\infty} f_{1-\alpha}(\tau) \frac{\partial}{\partial t} v(x,t+\tau) d\tau.$$

При $g \in (D^0(\overline{Q}_T))', u_0 \in \mathcal{E}'(R^n)$ розглядаємо задачу Коші

$$(L_\alpha u)(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^n. \tag{2}$$

Під розв'язком задачі (1), (2) розуміємо узагальнену функцію $u \in (D^0(\overline{Q}_T))'$ таку, що

$$(u, \widehat{L}_\alpha \psi)_{\overline{Q}_T} = (g,\psi)_{\overline{Q}_T} + (u_0 \times f_{1-\alpha}, \psi) \ \ \forall \psi \in D^0(\overline{Q}_T),$$

де $\times$ – операція прямого добутку узагальнених функцій.

Застосовуючи властивості вектор-функції Гріна задачі Коші (1), (2), доведена теорема існування та єдиності розв'язку задачі.

ПРО РОЗСІЯННЯ У ВЕРШИНІ ЗІРКОВОГО ГРАФА, В ЯКІЙ ЗОСЕРЕДЖЕНИЙ СИНГУЛЯРНИЙ ПОТЕНЦІАЛ

Степан С. Манько
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
e-mail: stepan.manko@gmail.com

Доповідь стосується задачі про розсіяння квантово-механічної частинки у вершині зіркового графа $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, який має три ребра γ_1, γ_2 та γ_3. В околі центру a зірки Γ зосереджений потенціал вигляду

$$Q_\varepsilon(x) = \frac{\alpha}{\varepsilon^2} Q\Big(\frac{x-a}{\varepsilon}\Big).$$

Тут ε – малий додатний параметр, α – дійсна стала, а Q – функція на Γ з компактним носієм. На кожному ребрі графа введено натуральну параметризацію з параметром $s \in (0, +\infty)$, де $s = 0$ відповідає вершині a.

Нехай $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, Q)$ – гамільтоніан з потенціалом Q_ε на Γ, а H_0 – гамільтоніан вільної частинки на графі. Розглянемо хвильовий пакет e^{-iks}, де $k > 0$, що приходить з безмежності вздовж ребра γ_n. Стаціонарна задача розсіяння, асоційована з парою гамільтоніанів $\mathrm{H}_\varepsilon(\alpha, Q)$ та H_0, полягає у знаходженні розв'язку задачі

$$-y'' + Q_\varepsilon y = k^2 y \quad \text{на} \quad \Gamma \setminus \{a\}, \qquad y_{\gamma_1}(a) = y_{\gamma_2}(a) = y_{\gamma_3}(a), \quad \sum_{j=1}^{3} \frac{dy}{d\gamma_j}(a) = 0,$$

який поза ε-околом вершини a збігається з розв'язком аналогічної задачі на графі без потенціала

$$\psi_n(s,k) = \begin{cases} T_{nm}(\alpha, k, \varepsilon) e^{iks} & \text{на} \quad \gamma_m,\ m \neq n, \\ e^{-iks} + T_{nn}(\alpha, k, \varepsilon) e^{iks} & \text{на} \quad \gamma_n \end{cases}$$

при $n = 1, 2, 3$. Число $|T_{nm}|^2$ – це ймовірність проникнення квантової частинки з ребра γ_n на ребро γ_m, а $|T_{nn}|^2$ – це ймовірність відбиття частинки. Якщо для всіх $n, m = 1, 2, 3$ таких, що $n \neq m$, виконуються рівності $T_{nm}(\alpha, k, 0) = 0$, то бар'єр Q_ε називають асимптотично непроникним при $\varepsilon \to 0$.

В [1] показано, що квантова частинка проникає крізь потенціал Q_ε в границі при $\varepsilon \to 0$ лише тоді, коли стала α належить до зліченної *резонансної* множин $\Sigma_Q \subset \mathbb{R}$. Крім того, запропоновано конструктивний опис граничних значень $T_{nm}(\alpha, k, 0)$. Ця робота стала продовженням досліджень проведених в [2, 3], де розглядали розсіяння на аналогічному потенціалі в одновимірному випадку.

1. Man'ko S.S., *On δ'-like potential scattering on star graphs*, 2009 (arXiv:1007.0398v1).
2. Манько С.С., *Про оператори Шредингера та Штурма-Ліувілля з δ'-потенціалами*, Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат., 2009, **71**, 142-155.
3. Golovaty Yu.D., Hryniv R.O. *On norm resolvent convergence of Schrödinger operators with δ'-like potentials*, J. Phys. A, Math. Theor., 2010, **43**, 155204 (14 pp).

ТЕОРЕМА ХОХШТАДТА-ЛІБЕРМАНА ДЛЯ СТІЛЬТЬЄСІВСЬКОЇ СТРУНИ

Ольга М. Мартинюк
Південноукраїнський національний педагогічний університет ім. К.Д. Ушинського, Одеса, Україна
e-mail: martynyuk_olga@mail.ru

Відомо [1] (див. також [2], [3]), що два спектри крайових задач однозначно визначають потенціал рівняння Штурма-Ліувілля та два спектри крайових задач разом з загальною довжиною струни однозначно визначають розподіл маси струни ([4]). Так звана напівобернена задача або задача Хохштадта-Лібермана, була вперше розглянута в [6]. Вона полягає в тому, що за відомим спектром крайової задачі, породженої рівнянням Штурма–Ліувілля на інтервалі [0, a], та потенціалом цього рівняння на інтервалі [0,a/2] потрібно знайти потенціал на інтервалі (a/2, a]. В [6] доведено, що ці дані однозначно визначають потенціал на інтервалі (a/2, a], однак не було запропоновано метод відновлення потенціалу. Напівобернена задача в деякому сенсі виглядає спорідненою з так званою оберненою задачею за трьома спектрами [5].

Дискретним аналогом рівняння Штурма-Ліувілля є рівняння стільтьєсівської струни [7]. Розглянута наступна задача. Відомі величини мас, розташованих на лівій половині стільтьєсівської струни, разом із інтервалами між ними, кількість яких становить половину загальної, а також спектр задачі Діріхле, породженої цією струною, та її довжина. Потрібно знайти величини мас на правій частині інтервалу та довжини інтервалів між ними. В неявному вигляді знайдено умову існування розв'язку задачі. Доведено, що задача має єдиний розв'язок. Запропоновано метод знаходження мас та довжин інтервалів на правій частині струни.

1. Borg G., *Eine Umkehrung der Sturm–Liouvillschen Eigenwertaufgabe*, Acta Math., 1946, **78**, №1, 1-96.
2. Левитан Б.М., *Обратная задача Штурма-Лиувилля*, М., Наука, 1984.
3. Марченко В.А., *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения*, К., Наукова думка, 1977.
4. Кац И.С., Крейн М.Г. *О спектральной функции струны* // Дополнение 2 в кн.: Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи, Москва: Мир, 1968.
5. Pivovarchik V.N., *An inverse problem by three spectra, Integral Equations and Operator Theory*, 1999, **34**, № 2, 234-243.
6. Hochstadt H., Lieberman B., *An inverse Sturm-Liouville problems with mixed given data*, SIAM J. Appl. Math., 1978, **34**, 676-680.
7. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. *Осциляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем.* – Москва: ГИТТЛ, 2 изд, 1950.

ПРО ЗАДАЧІ З ОПЕРАТОРАМИ ДРОБОВОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Михайло І. Матійчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

1. На поверхні $S^+ = S \times (0, \infty)$ із класу Діні $C^{(2b,\omega)}$ розглядається параболічний оператор

$$\lambda(D) = \frac{\partial}{\partial t} + (-1)^b(\Delta x' + B_{x_n}), \quad x' \in E_{n-1},$$

$G(t, x)$ – фундаментальний розв'язок, за допомогою якого будуються дробові степені оператора $\lambda(D)$,

$$D^\alpha_\lambda u \equiv \lambda(D)\mathfrak{F}^{(1-\alpha)}_\lambda u, \quad t \in (0, T), \quad \alpha \in (0, 1),$$

$$\mathfrak{F}^\alpha_\lambda(u, t, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)}^{1-\alpha} \int_{S^+} G(t-\tau, x, \xi)u(\tau, \xi)dS_\xi.$$

Вивчається задача Коші та крайова задача

$$D^\alpha_\lambda u - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} u(0, x) + B(t)P(t, x) = \sum_{|k| \le [2b\alpha]} A_k(t, x)D^k_x u + f, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u|_{t=T} = \psi(x), \quad x \in S^+. \tag{2}$$

2. Задача з умовами (2) розглядається для рівняння фрактальної дифузії

$$D^\alpha_t u = a(t, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t, x)\frac{\partial u}{\partial x} + c(t, x)u + f, \quad x \in E_1. \tag{3}$$

3. Для параболічної системи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k| \le 2b} A_k(t)D^k_x u + B(t)P(t, x) + f(t, x), \tag{4}$$

будується розв'язок задачі (2). Розв'язки задач зображаються з допомогою функції Гріна.

1. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N., *Analytic methods the theory of differential and preudo-differential equations of parabolic type*, Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2004.
2. Матійчук М.І., *Параболічні та еліптичні задачі у просторі Діні*, Чернівці: ЧНУ, 2010.

КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КВАЗІЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

Ігор П. Мединський

Національний університет "Львівська політехніка",

Львів, Україна

e-mail: dpm.mip@polynet.lviv.ua

В шарі $\Pi \equiv (0, \infty] \times \mathbb{R}^n$ розглядається задача Коші

$$(Lu)(t,x) = f(t, D_{x_1}u(t,x), u(t,x)), \quad (t,x) \in \Pi, \tag{1}$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де

$$L \equiv \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} - a_0(t,x)$$

– ультрапараболічний диференціальний вираз типу Колмогорова, в якому n_1, n_2, n_3 – натуральні числа такі, що $n_3 \leq n_2 \leq n_1$, $n = n_1 + n_2 + n_3$, $x_1 \equiv (x_{11}, ..., x_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \equiv (x_{21}, ..., x_{2n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $x_3 \equiv (x_{31}, ..., x_{3n_3}) \in \mathbb{R}^{n_3}$, $D_{x_1}u \equiv (\partial_{x_1}u, ..., \partial_{x_n}u)$. Припускається, що коефіцієнти оператора L – функції a_{js}, a_j, $\{j, s\} \subset \{1, ..., n_1\}$ і a_0 є неперервними, дійснозначними та для рівняння (1) виконується умова параболічності: існує стала $\delta > 0$ така, що для довільних $\sigma_1 \equiv (\sigma_{11}, ..., \sigma_{1n_1})$, рівномірно щодо $(t,x) \in \Pi$ справджується нерівність

$$\sum_{k,l}^{n_1} a_{kl}(t,x)\sigma_{1k}\sigma_{1l} \geq \delta \mid \sigma_1 \mid^2 .$$

Знайдені умови на коефіцієнти оператора L та на функції f і φ, за яких для задачі Коші (1), (2) існує єдиний розв'язок, визначений у деякому шарі $(0, T] \times \mathbb{R}^n$. У випадку сталих коефіцієнтів оператора L і для $f \equiv u^{1+\beta}, \beta > 0$ на множині додатних розв'язків встановлено умови існування нетривіального глобального розв'язку.

Для доведення цих тверджень використовуються властивості фундаментального розв'язку та відповідних потенціалів з монографії [1], а також загальна теорема про глобальну розв'язність з праці [2].

1. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. *Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type*, Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2004. (Operator Theory: Advances and Applications, **152**).
2. Івасишен С.Д., Мединський І.П. *Про глобальні розв'язки задачі Коші для квазілінійних параболічних рівнянь*, Мат. методи та фіз.-мех. поля., 1999, **42**, № 2, 31-38.

НЕІСНУВАННЯ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ІНТЕГРАЛЬНИМ ЗБУРЕННЯМ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ЗА ЧАСОМ ОБЛАСТІ

Максим О. Нечепуренко
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
e-mail: m.nechepurenko@mfc.in.ua

У цій праці досліджено неіснування глобального розв'язку мішаної задачі для нелінійної системи рівнянь з інтегральним збуренням в необмеженій за часом області. Ця праця розвиває та узагальнює результати дослідження мішаної задачі в необмеженій за часом області, викладені в [2] та [3].

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, $n \in \mathbb{N}$, $Q = \Omega \times (0, +\infty)$.

В області Q розглянуто мішану задачу для системи рівнянь

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\theta_{x_i} + a_0(x)u + a_1(x)u_t + a_2(x)\theta -$$

$$-\left(\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx\right) \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = b_0(x)|u|^{p-2}u, \tag{1}$$

$$\theta_t - \sum_{i,j=1}^{n} (c_{ij}(x)\theta_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} (b_i(x)u_t)_{x_i} + c_0(x)|\theta|^{q-2}\theta + c_1(x)u_t + c_2(x)\theta = 0$$

з початковими та крайовими умовами:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \theta\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

Вважатимемо, що $p > 2$, $q > 2$, $u_0,\ \theta_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$.

Доведено неіснування глобального узагальненого розв'язку задачі при певних умовах на коефіцієнти рівняння і початкові дані.

1. Apolaya R.F., Clark H.R., Feitosa A.J., *On a nonlinear coupled system with internal damping*, Electronic Journal of Differential Equations, 2000, **2000**, № 64, 1-17.
2. Clark M.R., Lima O.A., *On a mixed problem for a coupled nonlinear system*, Electronic Journal of Differential Equations, 1997, **1997**, № 6, 1-11.
3. Нечепуренко М.О., Торган Г.Р., *О существовании обобщенного решения нелинейной эволюционной системы уравнений в неограниченной по времени области*, Укр. мат. вісн., 2010, **7**, № 1, 49–72.

СПРЯЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ВЗДОВЖ НЕВІДОМОЇ ЛІНІЇ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ В СЕКТОРІ

Ольга В. Пелюшкевич
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
e-mail: olpelushkevych@ukr.net

Нехай $V_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, k_1(t) < x < k_2(t), k_1(0) = k_2(0) = 0\}$ – область з рухомими межами $x = k_s(t) : [0,T] \to \mathbb{R}$, $s \in \{1,2\}$. Невідома лінія $x = k(t) : [0,T] \to \mathbb{R}$, $k(0) = 0$ розбиває область V_T на дві підобласті: $V_T^- = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, k_1(t) < x < k(t), k_1(0) = k(0) = 0\}$ і $V_T^+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T$, $k(t) < x < k_2(t), k(0) = k_2(0) = 0\}$. В кожній з підобластей розглянемо відповідну гіперболічну напівлінійну систему рівнянь

$$\frac{\partial u_i^\pm}{\partial t} + \lambda_i^\pm(x,t)\frac{\partial u_i^\pm}{\partial x} = f_i^\pm(x,t,u^\pm,v^\pm),\ i \in \{1,\ldots,m\},$$
$$\frac{\partial v_j^\pm}{\partial x} = q_j^\pm(x,t,u^\pm,v^\pm),\ j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{1}$$

де $u^\pm(x,t) = (u_1^\pm(x,t),\ldots,u_m^\pm(x,t)) : \overline{V_T^\pm} \to \mathbb{R}^m$, $v^\pm(x,t) = (v_1^\pm(x,t),\ldots,v_n^\pm(x,t)) : \overline{V_T^\pm} \to \mathbb{R}^n$ – шукані функції, а $\lambda_i^\pm$, $f_i^\pm : \mathbb{R}\times[0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $q_j^\pm : \mathbb{R}\times[0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – відомі функції.

Нехай поведінка функції k описується системою диференціальних рівнянь

$$\dot{k}(t) = g(k,t,u^\pm(k,t),v^\pm(k,t)), \tag{2}$$

де $u^\pm(k,t) = (u^-(k(t),t),u^+(k(t),t)) : \mathbb{R}\times[0,T] \to \mathbb{R}^{2m}$, $v^\pm(k,t) = (v^-(k(t),t)$, $v^+(k(t),t)) : \mathbb{R}\times[0,T] \to \mathbb{R}^{2n}$, а $g(k,t,u^\pm,v^\pm) : \mathbb{R}\times[0,T]\times\mathbb{R}^{2m}\times\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ – відома функція.

Для системи (1)-(2) запишемо початкові умови

$$u_i^\pm(0,0) = \alpha_i^\pm,\quad i \in \{1,\ldots,m,\},\quad v_j^\pm(0,0) = \beta_j^\pm,\quad j \in \{1,\ldots,n,\}. \tag{3}$$

Визначимо множини індексів I_1, I_2, I_-, I_+, J_-, J_+ :

$$I_1 = \{i \in \{1,\ldots,m\} : \lambda_i^-(0,0,\alpha^0) < k_1'(0)\},\ I_2 = \{i \in \{1,\ldots,m\} : \lambda_i^+(0,0,\alpha^0) > k_2'(0)\},$$
$$I_- = \{i \in \{1,\ldots,m\} : \lambda_i^-(0,0,\alpha^0) < g(0,0,\alpha^0)\},\quad I_+ = \{i \in \{1,\ldots,m\} :$$
$$\lambda_i^+(0,0,\alpha^0) > g(0,0,\alpha^0)\},\quad J_\pm \subset \{1,\ldots,n\}\backslash I_\pm,\quad l_\pm = card\, I_\pm.$$

На бічних межах областей V_T^-, V_T^+ задамо крайові умови

$$u_i^-(k_1(t),t) = h_i^-(t), i \in I_1,\ u_i^+(k_2(t),t) = h_i^+(t), i \in I_2,\ v_j^-(k_1(t),t) = \psi_j(t), j \in I_1, \tag{4}$$

а на вільній межі $x = k(t)$ умови спряження

$$u_i^-(k(t),t) = \gamma_i^-(k(t),t,\widetilde{u}^\pm(k(t),t),\widetilde{v}^\pm(k(t),t)),\quad i \in I_-,$$
$$u_i^+(k(t),t) = \gamma_i^+(k(t),t,\widetilde{u}^\pm(k(t),t),\widetilde{v}^\pm(k(t),t)),\quad i \in I_+,$$
$$v_j^\pm(k(t),t) = \eta_j^\pm(k(t),t,\widetilde{u}^\pm(k(t),t),\widetilde{v}^\pm(k(t),t)),\quad j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{5}$$

де $\widetilde{u}^\pm(k,t) = (\widetilde{u}^-(k,t),\widetilde{u}^+(k,t))$, $\widetilde{u}^\pm = (u_i^\pm)$, $i \in J_\pm$.

За допомогою методу стискуючих відображень встановлено достатні умови коректної узагальненої неперервної розв'язності задачі (1)-(5).

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО СТОХАСТИЧНОГО РІВНЯННЯ З ПУАССОНІВСЬКИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Галина М. Перун

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

Нехай у ймовірнісному просторі (Ω, F, P) з потоком σ-алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$ визначена узгоджена з F_t випадкова функція $u(t,x,\omega)$, $t \in [0,T]$, $x \in E_n$, $\omega \in \Omega$, яка з ймовірністю 1 є розв'язком задачі Коші

$$d_t u(t,x,\omega) = \Big[\sum_{|k|=2b} A_k(t,x) D_x^k u(t,x,\omega)\Big] dt + \\ + b(t,x,u,u'_x,\ldots,u_x^{(s)}) \int_{\Theta} f(\theta,t)\widetilde{\nu}(d\theta \times dt), s \leq 2b-1, \quad (1)$$

$$u(0,x,\omega) = \varphi(x), \quad x \in E_n, \quad \omega \in \Omega. \quad (2)$$

Тут $\widetilde{\nu}(d\theta \times dt)$, $\theta \in \Theta \subset E_1$ – центрована міра Пуассона. Відмітимо, що $u(t,x,\omega)$ є неперервною справа і має лівосторонні границі [1] за змінною t, тобто належить простору Скорохода.

Припустимо, що коефіцієнти $A_k(t,x)$, $|k| = 2b$, задовольняють умови існування фундаментального розв'язку $Z(t,\tau,x,y)$ відповідного детермінованого рівняння. З його допомогою поставимо у відповідність задачі (1), (2) інтегро-диференціальне рівняння

$$u(t,x,\omega) = \int_{E_n} Z(t,0,x,y)\varphi(y)dy + \int_0^t \int_{E_n} Z(t,\tau,x,y) b(\tau,y,u,...,u_y^{(s)})dy \int_{\Theta} f(\theta,\tau)\widetilde{\nu}(d\theta \times d\tau), \quad (3)$$

припускаючи, що інтеграли в (3) визначені.

Продиференціюємо його за x до порядку $s < 2b$. Отримаємо систему стохастичних інтегральних рівнянь, ядром яких є $D_x^k Z$, $|k| < 2b$.

Розв'язок відшукується в просторі з нормою

$$\|u\|_M^2 = \int_0^T \|u\|_{L_2}^2 dt = \int_0^T \int_{E_n} M\Big|\sum_{|k| \leq s} D_x^k u\Big| dx dt, \quad (4)$$

де M – операція математичного сподівання.

Теорема. Нехай $A_k(t,x)$ визначені в $[0,T] \times E_n$, неперервні за t рівномірно щодо x і $A_k(t,x) \in C_x^{(\alpha)}$; виконується умова рівномірної параболічності; функції b, f, $\widetilde{\nu}$ узгоджені з σ-алгеброю F_t; φ узгоджена з F_0 і належить L_2; функції b з ймовірністю 1 задовольняють умову Ліпшиця $\|b(t,x,v_1) - b(t,x,v_2)\| \leq L_0 \|v_1 - v_2\|_{L_2}$ та $\|b(t,x,v)\|_{L_2}^2 \leq c(1 + \|v\|_{L_2}^2)$.

Тоді існує єдиний в M з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок задачі Коші (1), (2), який оцінюється через початкову функцію за нормою (4).

1. Гихман И.И., Скороход А.В. *Стохастические дифференциальные уравнения.*, К.: Наук. думка, 1968.

ІНТЕГРАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ КОНІК НА ГІПЕРБОЛОЇДАХ

Галина С. Польща, Віктор С. Лісняк
Київський технологічний інститут легкої промисловості,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київ, Україна
e-mail: mif@univ.kiev.ua

В інтегральній геометрії нерідко будуються групово-інваріантні міри саме у вигляді $\mu(W) = \{W\} \int M\omega^1 \wedge \omega^2 ... \wedge \omega^m$, де m-кратний інтеграл поширюється на (у найзагальнішому розумінні) інтегровну множину W однотипних геометричних елементів, розподілених з густиною M , а ω^s з $s = 1, 2, ..., m$ – це головні лінійні диференціальні форми біжучого елементу. Ці форми підпорядковані зовнішнім диференціальним рівнянням (структури) виду $D\omega^s = c^s_{uv}\omega^u \wedge \omega^v$. Тут складність становить і з'ясування, й унаочнення областей означення мір і густин.

Рівняння вигляду $x^2/a^2 + \omega y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ при $\omega = 1$ є канонічним для однопорожнинних гіперболоїдів, а при $\omega = -1$ – для двопорожнинних. Коніки (невироджені криві другого порядку – еліпси, гіперболи, параболи) C на кожному гіперболоїді (як квадриці) Q є плоскими його перерізами площиами π, рівняння яких (з тільки істотними параметрами) без відчутної втрати загальності зараз зручно взяти саме у вигляді $z = kx + ly + p$. За жодних k, l, p це рівняння не має вигляду $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, тобто не зображує вертикальну площину. Тоді й переріз $\pi \cap Q$ не "вертикальний", не "паралельний" осі гіперболоїду, а тому його проекція – тільки коніка. Множина χ неохоплених (обійдених) у $z = kx + ly + p$ (вертикальних) площин нульвимірна у загальній множині π. Тому C утворюють ∞^3 їх множину. Їхні рівняння подані системою $\{x^2/a^2 + \omega y^2/b^2 - (kx + ly + p)^2/c^2 = 1$, $z = kx + ly + p$.

Її нетривіальна сумісність (існування невиродженого конічного перерізу) є наявність нетривіального (у цьому сенсі) розв'язку її першого рівняння $b^2(c^2 - a^2k^2)x^2 + {} + a^2(\omega c^2 - b^2l^2)y^2 - 2a^2b^2(klxy + kpx + lpy) - a^2b^2c^2 = 0$.

Інваріантами перетворень групи рухів для загального рівняння $a_{ij}x^ix^j = 0$ (де $i, j = 1, 2, 3$, $a_{ij} = a_{ji}$, а $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = 1$) кривої другого порядку $i = a_{11} + a_{22}$, $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\Delta = det(a_{rs})$ зараз є зокрема такі: $i = (\omega a^2 + b^2)c^2 - a^2b(k^2 + l^2)$, $\delta = a^2b^2c^2(\omega c^2 - b^2l^2 - \omega a^2k^2)$. Після перепозначень виду $f_1 = f(\omega = 1)$ для 1-порожнинних гіперболоїдів і $f_2 = f(\omega = -1)$ для 2-порожнинних утворимо області $\delta_1 = \{k, l, p\} \cap (\Delta_1 \neq 0)$ та $\delta_2 = \{k, l, p\} \setminus (\Delta_1 = 0)$. Тоді формули $\mu(h) = \{\delta_h\} \iiint dk \wedge dl \wedge dp$ з $h = 1$ чи з $h = 2$ відповідно визначають міри конік на гіперболоїдах. Зараз за міру взято об'єм належної частини параметричного простору групи перетворень. Тут зміст параметрів k, l, p відомий, а числа a, b, c потенційно фіксовані (хоча можлива і "зворотна" постановка задачі). В інтегрально-геометричних задачах на $\{C\}$ накладаються певні додаткові геометричні обмеження G і це їх споріднює з геометричними задачами на умовні (побудовані на грунті нормованої міри) імовірності. Тоді й інтегрування у $\mu(h)$ ведеться вже з дотриманням розширеної вимоги $G \wedge (\Delta \neq 0)$. Змістовні геометричні результати дістаємо використанням у G формул для i, δ, Δ, адже за умови $\Delta \neq 0$ вимога $\delta = 0$ характеризує параболи, $\delta < 0$ – гіперболи, а $\delta/i > 0$ – дійсні еліпси – при $i^2 = 4\delta$ (тобто при $a_{11} = a_{22}, a_{12} = 0$) – кола.

ПРО МІШАНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ІНТЕГРАЛЬНИМ ДОДАНКОМ

Наталія П. Процах
Національний лісотехнічний університет України,
Львів, Україна
e-mail: protsakh@ukr.net

Нехай Ω, D – обмежені області простору $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}^l$ відповідно, $\partial\Omega \in C^1$ та $\partial D \in C^1$, T – довільне скінченне число.

В області $Q_T = \Omega \times D \times (0,T)$ розглянуто мішану задачу

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} +$$

$$+ \int_0^t g(t-s) \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x,y,s)\, ds = f(x,y,t), \tag{1}$$

$$u|_{S_T} = 0; \quad u|_{\Sigma_T} = 0, \tag{2}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \times D, \tag{3}$$

де $\Sigma_T = \partial\Omega \times D \times (0,T)$, $S_T = \left\{ (x,y,t) \in \Omega \times \partial D \times (0,T) : \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\cos(\nu, y_i) < 0 \right\}$, ν – зовнішня нормаль до $\partial\Omega \times D \times (0,T)$.

Розв'язком задачі (1)-(3) назвемо функцію $u \in H^1(Q_T) \cap C((0,T); L^2(\Omega \times D))$, $u|_{\Sigma_T} = 0$, яка задовольняє рівняння (1) в сенсі розподілів та задовольняє початкову умову (3).

За певних умов на коефіцієнти рівняння (1) отримано умови існування єдиного розв'язку задачі (1)-(3), а також встановлено асимптотичну поведінку розв'язку цієї задачі при зростанні часової змінної. Ця поведінка залежить від поведінки функції $g(t)$ на нескінченності. Зокрема, якщо $g'(t) \le -Cg(t)$ для всіх $t \ge 0$ та додатної сталої C, то розв'язок спадає на нескінченності експоненціально, а якщо $g'(t) \le -C(g(t))^r$, то розв'язок спадає, як $(1+t)^{-m}$, де m залежить від r.

ПРО НЕІСНУВАННЯ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ

Петро Я. Пукач
Національний університет "Львівська політехніка",
Львів, Україна
e-mail: ppukach@i.ua

Нехай Ω – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$ $(n \ge 1)$ з кусково гладкою межею $\partial\Omega \in C^1$. Позначимо $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $S_\tau = \partial\Omega \times (0,\tau)$, причому при $\tau = +\infty$ писатимемо Q, S замість відповідно Q_τ і S_τ.

В області Q розглядаємо першу змішану задачу для нелінійного рівняння

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D^{\beta}\left(a_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_t\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D^{\beta}\left(b_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u\right) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2} D^{\alpha}(b_{\alpha}(x)|D^{\alpha}u|^{q-2}D^{\alpha}u) - c_0(x)|u|^{p-2}u = 0 \qquad (1)$$

з початковими умовами

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x) \qquad (2)$$

та крайовими умовами

$$u|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S = 0, \qquad (3)$$

де

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ($i = 1, ..., n$), $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$. Рівняння (1) є багатовимірним нелінійним узагальненням відомого лінійного рівняння коливань балки в моделі Тимошенка. Рівняння такого типу зустрічаються в нелінійній моделі коливань Фойгта-Кельвіна, яка описує згинні коливання стрижня, виготовленого з гнучкого матеріалу, моделюють поширення збурень у в'язкопружному матеріалі під дією зовнішніх ультразвукових аеродинамічних сил, інші процеси подібної природи. Позначимо

$$E_0 = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left[(u_1)_t^2 + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_0D^{\beta}u_0\right]dx + \frac{1}{q}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2} b_{\alpha}(x)|D^{\alpha}u_0|^q dx -$$

$$-\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} c_0(x)|u_0|^p dx.$$

Нехай $c_0(x) \geq C_0 > 0$; $E_0 < 0$; $p > 2$, якщо $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, $2 < p \leq \frac{2n}{n-4}$, якщо $n > 4$; $2 < q < \frac{p+2}{2}$. При виконанні деяких додаткових умов на коефіцієнти та вихідні дані доведено неіснування глобального розв'язку задачі (1)-(3).

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ ЗІ СЛАБКИМ ЗАГАЛЬНИМ ВИРОДЖЕННЯМ

Тетяна М. Савіцька
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
e-mail: tetjankas@mail.ru

В області $Q_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < \psi(t)h(t),\ 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу:

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(\psi(t)h(t), t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in (0,T], \tag{3}$$

$$\int\limits_0^{\psi(t)h(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T],$$

де функція $\psi(t)$ – додатна, монотонно зростаюча і в точці $t = 0$ дорівнює нулю, а функції $(h(t), a(t), u(x,t))$, $a(t) > 0$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T]$ – невідомі.

Нехай виконуються наступні припущення:

(A1) $\psi, \mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2,4$, існує границя $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mu_i'(t)}{\psi'(t)} \in C[0,T]$, $i = 1,2$, $\mu_3 \in C[0,T]$, коефіцієнти $b, c, f \in C([0,\infty) \times [0,T])$ задовольняють умову Гельдера локально за змінною x з показником $\alpha \in (0,1)$ рівномірно відносно $t \in [0,T]$;

(A2) $\mu_i(t) > 0$, $i = 1,2,3$, $t \in [0,T]$, $\mu_4(t) > 0$, $t \in (0,T]$, існує скінченна границя $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mu_4(t)}{\psi(t)} > 0$, $f(x,t) \geq 0$, $c(x,t) \leq 0$, $(x,t) \in [0,\infty) \times [0,T]$, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mu_2'(t) - \mu_1'(t)}{\psi'(t)} > 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(t) > 0$, $t \in (0,T]$ – монотонно зростаюча функція, $\int\limits_0^t \dfrac{\psi'(\omega)d\omega}{\sqrt{t-\omega}} \to 0$, $t \to 0$;

(A3) $\mu_1(0) = \mu_2(0)$;

(A4) існують неперервні границі $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{b(x,t)}{\psi'(t)}$, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{c(x,t)}{\psi'(t)}$, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x,t)}{\psi'(t)}$.

Теорема 1. Нехай виконуються припущення **(A1)-(A3)**. Якщо $\psi'(t)$ – монотонно спадна функція на $(0,T]$, $\psi'(t) \to \infty$ при $t \to 0$, то існує хоча б один розв'язок $(h(t), a(t), u(x,t))$ задачі (1)-(4), який належить до класу $C^1(0,T_0] \cap C[0,T_0] \times C[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$, де T_0, $0 < T_0 \leq T$ визначається через вихідні дані.

Теорема 2. Нехай виконуються припущення **(A1)-(A4)**. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mu_4'(t)}{\psi'(t)} \in C[0,T]$ і $\psi'(t)$ – монотонно зростаюча функція на $(0,T]$, $\psi'(0) = 0$, то існує хоча б один розв'язок $(h(t), a(t), u(x,t))$ задачі (1)-(4), який належить до класу $C^1(0,T_0] \cap C[0,T_0] \times C[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$, де T_0, $0 < T_0 \leq T$ визначається через вихідні дані.

ОСРЕДНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Генадий В. Сандраков
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,
Киев, Украина
e-mail: sandrako@mail.ru

Рассматриваются вопросы осреднения краевых и начально-краевых задач для нелинейных уравнений и вариационных неравенств с ограничениями на решения. Такие уравнения и неравенства определяются нелинейным псевдомонотонным и коэрцитивным оператором второго порядка с периодическими быстроосциллирующими коэффициентами, действующим непрерывно из $W_0^{1,p}(\Omega)$ в $W^{-1,q}(\Omega)$ и зависящим от малого положительного параметра ε, где $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ и $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ является ограниченной областью с липшицевой границей $\partial\Omega$.

Стационарный вариант таких задач, например, формулируется в виде вариационного неравенства для $u_\varepsilon \in K$:

$$\int_\Omega a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon\right)(\nabla v - \nabla u_\varepsilon)\, dx + \int_\Omega b\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon\right)(v - u_\varepsilon)\, dx \geq$$

$$\geq \int_\Omega g\,(\nabla v - \nabla u_\varepsilon)\, dx + \int_\Omega f\,(v - u_\varepsilon)\, dx$$

$$\forall\, v \in K = \{ v \in W_0^{1,p}(\Omega) : v \geq \psi \quad \text{п. в.} \quad \text{в} \quad \Omega \},$$

где $f \in L^q(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)^n$, $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ удовлетворяет неравенству $\psi \leq 0$ на $\partial\Omega$ в $W^{1,p}(\Omega)$, а вектор-функция $a(x, y, \sigma, \xi)$ и функция $b(x, y, \sigma)$ удовлетворяют определенным условиям монотонности, роста и регулярности и являются 1-периодическими относительно $y \in \mathrm{R}^n$.

Будут приведены двухмасштабные и макромасштабные (осредненные) предельные вариационные неравенства и сформулированы утверждения о подходящей сходимости решений рассматриваемых задач к решениям соответствующих предельных задач. Аналогичные утверждения о сходимости получены для краевых задач, определяемых $a(x, y, \sigma, \xi)$ и $b(x, y, \sigma)$, и соответствующих начально-краевых задач для нестационарных уравнений и вариационных неравенств. Эти результаты обобщают результаты работ [1] и [2], где рассматривались вариационные неравенства, определенные монотонным и псевдомонотонным, коэрцитивным и липшицевым оператором второго порядка с периодическими быстроосциллирующими коэффициентами, действующим непрерывно из $W_0^{1,2}(\Omega)$ в $W^{-1,2}(\Omega)$. При доказательстве таких результатов используются методы монотонности и двухмасштабной сходимости.

1. Сандраков Г.В., *Осреднение вариационных неравенств для задач с препятствием*, Матем. сборник, 2005, **196**, №4, 79-98.
2. Сандраков Г.В., *Осреднение вариационных неравенств и уравнений, определенных псевдомонотонным оператором*, Матем. сборник, 2008, **199**, №1, 67-100.

ПРО ІНВАРІАНТНІ МНОГОВИДИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Лідія М. Сергєєва, Ярослав Й. Бігун

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

e-mail: sergeevali@mail.ru

У роботі А.М. Самойленка [1] знайдені необхідні й достатні умови існування інваріантного многовиду системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = Q(t)y.$$

У цій праці розглядається аналогічна задача для системи диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу вигляду

$$\frac{dy}{dt} = Q(t)y + D(t)y(t+\lambda), \tag{1}$$

де $Q(t)$ і $D(t)$ – n-вимірні матриці, елементи яких неперервні на $\mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Теорема. Нехай $Q(t), D(t) \in M_m(\mathbb{R})$, $\Phi(t) \in M_{mn}(\mathbb{R})$, $m > n$, $\Phi^+(t) \in M_{mn}(\mathbb{R})$, $rank\, \Phi(t) = n$. Крім того, нехай $\Phi(t)$ та $\Phi^+(t)$ є неперервно диференційовними функціями для всіх $t \in \mathbb{R}$. Нехай також матриця $\Phi^+(t)$ псевдообернена для матриці $\Phi(t)$. І нехай

$M^m(t) = \{y \in \mathbb{R}^m : y = M(t)y\}$, $M^{m-n}(t) = \{y \in \mathbb{R}^m : M(t)y = 0\}$,

$M(t) = \Phi^+(t)\Phi(t)$, $L(M, Q) = \frac{dM}{dt} + MQ - QM$.

Тоді:

1. Підпростори $M^n(t)$ та $M^{m-n}(t)$, взяті разом, є інваріантними многовидами диференціального рівняння з відхиленням аргументу (1) тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$L(M(t), Q(t)) = 0, \quad M(t)D(t) = D(t)M(t).$$

2. Підпростір $M^n(t)$ є інваріантним многовидом рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли $L(M(t), Q(t))M(t) = 0$ для будь-якого $t \in \mathbb{R}$. Якщо $M^n(t)$ є інваріантним многовидом рівняння (1), то на $M^n(t)$, визначеним дифеоморфізмом $\Phi^+(t)$: $y = \Phi^+(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$, рівняння (1) еквівалентне рівнянню

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + R(t)x(t+\lambda),$$

де $P(t) = (\frac{d\Phi(t)}{dt} + \Phi(t)Q(t))\Phi^+(t)$, $R(t) = \Phi(t)D(t)\Phi^+(t)$.

3. Якщо $M^{m-n}(t)$ є інваріантним многовидом рівняння (1), то $kerL(M(t), Q(t)) \supset$ $\supset M^{m-n}(t)$ для будь-якого $t \in \mathbb{R}$.

1. Самойленко А.М. *Про інваріантні многовиди лінійних диференціальних рівнянь*, (Препринт / НАН України. Ін-т математики; №2009.7), Київ, 2009.
2. Самойленко А.М. *Про інваріантні многовиди лінійних диференціальних рівнянь II*, (Препринт / НАН України. Ін-т математики; №2010.3), Київ, 2010.

БАГАТОТОЧКОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Дмитро Спіжавка
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: dspizhavka@gmail.com

Багатоточкові задачі для рівнянь із частинними похідними з нелокальними умовами виникають при математичному моделюванні різних реальних процесів (поширення електромагнітних хвиль, коливання різних систем, водоперенесення тощо). У книзі [1] досліджено коректність крайових задач з нелокальними періодичними умовами за виділеною змінною для широких класів лінійних та квазілінійних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними скінченного порядку, а також лінійних рівнянь нескінченного порядку. Нелокальні багатоточкові сингулярні параболічні задачі у всьому просторі та в циліндричній області досліджені в [2].

У праці [3] вивчені властивості оператора $A = F^{-1}_{B_\nu}[aF_{B_\nu}]$, де F_{B_ν}, $F^{-1}_{B_\nu}$ – пряме та обернене перетворення Бесселя, a – однорідний негладкий у точці 0 символ (оператор A в [3] називається псевдо-Бесселевим оператором). Еволюційні рівняння з оператором A є природними узагальненнями сингулярних параболічних рівнянь з оператором Бесселя B_ν, який вироджується за просторовою змінною, оскільки B_ν можна також подати у вигляді $B_\nu\varphi = -F_{B_\nu}[\sigma^2 F_{B_\nu}[\varphi]]$, де φ – елемент простору, в якому вказане перетворення визначене. У цьому повідомленні встановлюється коректна розв'язність багатоточкової задачі для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t + Au = 0$ з псевдо-Бесселевим оператором у класі крайових умов типу розподілів; досліджуються властивості та структура фундаментального розв'язку такої задачі. Розв'язок $u(t,x)$ такої задачі є гладкою за змінною x функцією, у той же час відповідну крайову умову він задовольняє в слабкому розумінні збіжності. Тут встановлено, що розв'язок володіє властивістю локального посилення збіжності: за умови, що гранична узагальнена функція f збігається на деякій відкритій множині Q з гладкою функцією, то на такій множині відбувається локальне посилення збіжності ($u(t,\cdot)$ збігається на Q до f вже рівномірно або поточково).

1. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними*, К.: Наукова думка, 2002.
2. Матійчук М.І. *Параболічні сингулярні крайові задачі*, К.: Ін-т математики НАН України, 1999.
3. Городецький В.В., Ленюк О.М. *Еволюційні рівняння з псевдо-Бесселевими операторами*, Доп. НАН України, 2007, № 8, 11-15.

ЯКІСНІ ВЛАСТИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ ДЕЯКОГО НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Катерина В. Стєпанова
Інститут прикладної математики та механіки НАН України, Донецьк, Україна
e-mail: stepanova@iamm.ac.donetsk.ua

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ розглядається задача Коші з початковою функцією $u_0 \in L_2(\Omega)$, $R^N \setminus \{\operatorname{supp} u_0\} \neq \emptyset$ для напівлінійного параболічного рівняння з абсорбційним членом, що містить потенціал $h(t) \geq 0$, а саме:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + h(t)|u|^{q-1} u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \quad 0 < q < 1, \quad 0 \in \Omega, & (1) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \operatorname{supp} u_0 \subset \{x_1 < 0\}. & (2) \end{cases}$$

Відомо, що, за умови виконання нерівності $h(t) \geq h_0 > 0$ для кожного $t > 0$, розв'язок має властивість скінченності швидкості розповсюдження. В дослідженні функція $h(t)$ неперервна, невід'ємна, неспадаюча і така, що $h(0) = 0$. Автором отримані умови на характер виродження потенціалу $h(t)$ для скінченності швидкості розповсюдження носія узагальненого розв'язку задачі (1), (2).

В основі методу дослідження початквої задачі для напівлінійного параболічного рівняння з абсорбційним членом лежать інтегральні оцінки розв'язку (1), (2) і він (метод), по суті є поєднанням ідей та технік, що були розвинуті в рамках:
1) методу локальних енергетичних оцінок (див., наприклад, [1], [2]);
2) методу апріорних оцінок Сен-Венанівського типу, запропонованого в [3];
3) нелінійної адаптації методу оцінок принципу Сен-Венана (див. роботу [4]).

1. Antontsev S.N., *On the localization of solutions of nonlinear degenerate elliptic and parabolic equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1981, **260**, 1289-1293. English transl. in Soviet Math. Dokl., 1981, **24**.
2. Diaz J.I., Veron L., *Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 1985, **290**, 787-814.
3. Oleinic O.A., Iosifyan G.A., *An analogue of Saint-Venant's principle and the uniqueness of solutions of boundary-value problems for parabolic equations in unbounded domains*, Uspekhi Mat. Nauk, 1976, **31**, №6, 142-166. English transl. in Russian Math. Surveys, 1976, **31**, №6.
4. Akulov V.F., Shishkov A.E., *On asymptotic properties of solutions of mixed problems for quasilinear parabolic equations in unbounded domains*, Mat. Sb., 1991, **182**, 1200-1210. English transl. in Math. USSR-Sb., 1992, **73**.

ПРО ПРИНЦИП ЛОКАЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Олександр Стрибко

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України,

Львів, Україна

e-mail: strybko_sasha@ukr.net

Нехай $\mathbb{N}_m := \{1; \ldots; m\}$, $\mathbb{R}^m$ – m-вимірний евклідів простір, $\Pi^m := (0; T] \times \mathbb{R}^m$, $0 < T$; b, n_1, n_2, n_3 – фіксовані натуральні числа такі, що $n_1 \geq n_2 \geq n_3$, $n := n_1 + n_2 + n_3$; $\xi := (\xi_1; \xi_2; \xi_3)$, $\xi_j := (\xi_{j1}; \ldots; \xi_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$.

Для рівняння

$$\Big(\partial_t-\sum_{j=1}^{n_2}x_{1j}\partial_{x_{2j}}-\sum_{j=1}^{n_3}x_{2j}\partial_{x_{3j}}-A(t,\partial_{x_1})\Big)u(t,x)=0,\quad (t,x)\in\Pi^n, \tag{1}$$

де $A(t,\partial_{x_1})$ – лінійний диференціальний вираз порядку $2b$ з неперервними, залежними лише від t комплекснозначними коефіцієнтами такий, що вираз $\partial_t-A(t,\partial_{x_1})$ є $2b$-параболічним стосовно змінних (t,x_1) на множині Π^{n_1}, розглянемо задачу Коші з початковою умовою

$$u(t,\cdot)_{|t=0}=f, \tag{2}$$

у якій f – узагальнена функція з простору $\big(S_{\alpha^+}^{\beta^+}\big)'$, топологічно спряженого з $S_{\alpha^+}^{\beta^+}$. Тут $\alpha^+:=1-\dfrac{1}{2b}$, $\beta^+:=\dfrac{1}{2b}$, а S_α^β – простір типу S Гельфанда І.М. і Шилова Г.Є. [1], причому початкова умова (2) розуміється як слабка збіжність у просторі $\big(S_{\alpha^+}^{\beta^+}\big)'$.

У [2] встановлена коректна розв'язність задачі Коші (1), (2) у просторі нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^n$ функцій, а в праці [3] досліджується питання про можливість посилення збіжності до початкової функції f розв'язку u цієї задачі при $t\to+0$ за умови наявності в узагальненої функції f певних локальних властивостей гладкості.

Правильне наступне твердження, яке узагальнює результати, одержані в [3].

Теорема. Якщо узагальнена функція $f\in\big(S_{\alpha^+}^{\beta_*}\big)'$, $\beta_*>1$, збігається на множині $Q\subset\mathbb{R}^n$ з неперервно диференційовною функцією $g(\cdot)$ до порядку $q_0\in\mathbb{Z}_+^n$ включно, то для всіх $q\in\mathbb{Z}_+^n$, $q\le q_0$, похідна $\partial_x^q u(t;x)$ відповідного розв'язку задачі Коші (1), (2) прямує до $\partial_x^q g(x)$ при $t\to+0$ рівномірно стосовно змінної x на кожній компактній множині $\mathbb{K}\subset Q$.

1. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е., *Пространства основных и обобщенных функций*, М.: Физматгиз, 1958.
2. Возняк О.Г., *Про однозначну розв'язність задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь у просторах узагальнених функцій*, Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика., 2001, **111**, 5-10.
3. Возняк О.Г., *Про властивість локалізації розв'язків задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь у просторах узагальнених функцій*, Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика, 2002, **134**, 22-31.

ПРО ОДНУ ЧИСЛОВУ СХЕМУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ДВОВИМІРНИХ ОБЛАСТЯХ

Михайло А. Сухорольський, Олеся З. Любицька

Національний університет "Львівська політехніка",

Львів, Україна

e-mail: Olesia.liubitska@gmail.com

Крайові задачі для рівняння Гельмгольца в двовимірних областях можуть бути зведені з використанням методів теорії потенціалу до інтегральних рівнянь з ядерними функціями, що містять логарифмічну функцію або похідні від неї. Для числового розв'язування таких задач ефективно використовується метод колокації [1; 2; 3] з лінійною дискретизацією відповідних контурних інтегралів. При цьому значення інтегралів від функцій, що мають особливі точки, розглядаються в сенсі головного значення за Коші. Числова схема, що розглядається в праці, передбачає обчислення значень невласних інтегралів як границь послідовностей інтегралів від достатньо гладких функцій з граничними розривними функціями. Розглянемо інтеграл інтегрального рівняння крайових задач (в сенсі слабкої збіжності) для рівняння Гельмгольца

$$J(t_0) = \int_L \left[\frac{\partial}{\partial n(t_0)} \ln|t_0 - t| + G_2(t_0, t)\right] g(t)d(t), \tag{1}$$

де $|t_0 - t| = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}$; L – крива Ляпунова в області D_0; $g(t)$ – функція гельдерівського класу, $|g(t') - g(t'')| \leq A|t' - t''|^\mu$, $t', t'' \in L$, $0 < \mu \leq 1$, $A = const$, $G_i(t_0, t)$ – неперервні функції за двома змінними і гельдерівського класу за змінною t; $t_0(x_0, y_0) \notin L$; $\frac{\partial}{\partial n(t_0)}$ – похідна за напрямком одиничного вектора. Знайдемо інтегральну суму для інтеграла (1)

$$J(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial n(t_0)} \ln|t_0 - t| g(t_k)\Delta I_k + \sum_{k=1}^{n} G_2(t_0, t_k) g(t_k)\Delta I_k, \tag{2}$$

де $\Delta I_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$, t_k – точки розбиття кривої L. Знайдемо оцінку відхилення $\delta_n(t_0) = |J(t_0) - J_n(t)|$ за умови, що $t_0 \to t_0'$ вздовж нормалі до L, де t_0' – серединна точка відрізка $[t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, n}$, $t_0' \in L$.

Теорема. Якщо виконується умова $\rho = |t_0 - t| = \frac{\varepsilon_0}{n^\alpha}$, $\varepsilon_0 = const$, $0 < \alpha < 1$, то при $n \to \infty$ справджує нерівність: $|\delta_n(t_0)| \leq \frac{B(\rho)}{n^\mu}$, де $B(\rho)$ – скінченна величина.

1. Дмитриев В.И., Захаров Б.В., *Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики*, М.: Изд. МГУ, 1987.
2. Михлин С.Г. *Линейные уравнения в частных производных*, М.: Высшая школа, 1977.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М., *Численные методы*, М.: Наука, 1987.

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ $\vec{2b}$-ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Іван Р. Тимків

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України,

Львів, Україна

e-mail: tymkiv_if@ukr.net

Нехай $b_1, \ldots, b_p$ – задані натуральні числа, $\vec{2b} = (2b_1, \ldots, 2b_p)$; $s = (s', s_p) = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|\widehat{s}| = \frac{s_1}{2b_1} + \ldots + \frac{s_{p-1}}{2b_{p-1}} + \frac{s_p}{b_p}$, $|s'| = s_1 + \ldots + s_{p-1}$, $|s| = |s'| + s_p$;

$Q=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{p+1}:0<t<T, x=(x',x_p)\in\Omega_{p-1}\times(0,l)\}$, $\Omega=(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{p-1}$ – $(p-1)$-вимірний тор. В області Q розглянемо задачу

$$W(\partial/\partial t,D,B_\nu)u(t,x)\equiv\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n}+\sum_{s_0=0}^{n-1}\sum_{s_0+|\widehat{s}|=n}A_{s_0,s}\frac{\partial^{s_0+|s'|}B_\nu^{s_p}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_{p-1}^{s_{p-1}}}=f(t,x),\quad (1)$$

$$u(t_j,x)=\varphi_j(x),\quad j=1,\ldots,n,\quad 0\le t_1<t_2<\ldots<t_n\le T,\quad (2)$$

$$\begin{cases}|u(t,x',0)|\le C_1,\quad \dfrac{\partial^{2m+1}u(t,x',0)}{\partial x_p^{2m+1}}=0,\quad m=0,1,\ldots,(nb_p-2),\\ B_\nu^q u(t,x)\big|_{x_p=l}=0,\quad q=0,1,\ldots,(nb_p-1),\end{cases}\quad (3)$$

де $D=\frac{\partial^{|s'|}}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_{p-1}^{s_{p-1}}}$; $B_\nu=\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}+\frac{2\nu+1}{x_p}\frac{\partial}{\partial x_p}$ – оператор Бесселя за змінною x_p, $\nu\ge-1/2$; $A_{s_0,s}\in\mathbb{C}$. Для довільного $\eta=(\eta',\eta_p)\in\mathbb{R}^p$ корені рівняння $W(\xi,i\eta',-\eta_p^2)$ задовольняють оцінки $\operatorname{Re}\xi_j(\eta)\le-\delta(\eta_1^{2b_1}+\ldots+\eta_p^{2b_p})$, $\delta>0$, $j=1,\ldots,n$. Запровадимо такі позначення: $\{j_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu k_p}}x_p),\ k_p\in\mathbb{N}\}$ та $\Lambda=\{\lambda_{\nu k_p},k_p\in\mathbb{N}\}$ – сукупність власних функцій та множина власних значень задачі $B_\nu J(x_p)+\lambda J(x_p)=0$, $|J(0)|\le C_2$, $J(l)=0$; $k'=(k_1,\ldots,k_{p-1})\in\mathbb{Z}^{p-1}$, $\widetilde{k}=(k',\lambda_{\nu k_p})$, $\mu_j(\widetilde{k})$, $j=1,\ldots,n$, – корені рівняння $W(\mu,ik',-\lambda_{\nu k_p})=0$ (будемо вважати, що для кожного $\widetilde{k}\in\mathbb{Z}^{p-1}\times\Lambda$ всі корені є різними); $C^{(q,2\vec{b}q)}(\overline{Q})$ – банахів простір функцій $v(t,x)$ з нормою

$$\|v;C^{(q,2\vec{b}q)}(\overline{Q})\|=\sum_{s_0+|\widehat{s}|=q}\max_{(t,x)\in\overline{Q}}\left|\frac{\partial^{s_0+|s|}v(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right|;$$

$E^\gamma_{\vec{\alpha},2\vec{b}}(Q)$, $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in\mathbb{R}^p$, $\gamma\in\mathbb{R}$,– простір функцій

$$\varphi(x)=\sum_{k'\in\mathbb{Z}^{p-1}}\sum_{k_p=1}^{\infty}\varphi_k\exp(ik',x')j_\nu\big(\sqrt{\lambda_{\nu k_p}}x_p\big)$$

зі скінченною нормою

$$\|\varphi;E^\gamma_{\vec{\alpha},\vec{\sigma}}(Q)\|=\sum_{k'\in\mathbb{Z}^{p-1}}\sum_{k_p=1}^{\infty}|\varphi_k|(1+|k_1|)^{\alpha_1}\cdots(1+|k_{p-1}|)^{\alpha_{p-1}}\sqrt{\lambda_{\nu k_p}}^{\alpha_p}\times$$

$$\times\exp(\gamma(|k_1|^{\sigma_1}+\ldots+|k_{p-1}|^{\sigma_{p-1}}+\sqrt{\lambda_{\nu k_p}}^{\sigma_p}));$$

$C_3=2\max\limits_{1\le r\le n}(\max\limits_{|\widehat{s}|=r}|A_{n-r,s}|)^{1/r}$;

$\Delta(\widetilde{k})=\det\|\exp(\mu_q(\widetilde{k})t_j)\|_{j,q=1}^n\prod\limits_{1\le j<q\le n}(\mu_q(\widetilde{k})-\mu_j(\widetilde{k}))^{-1}$ – характеристичний визначник задачі (1)-(3); $\vec{e}=(1,\ldots,1)$, $\vec{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p)$, $\varepsilon_r>0$, $r=1,\ldots,p$.

Теорема 1. *Для единості розв'язку задачі (1)-(3) у просторі $C^{(n,2\vec{b}n)}(\overline{Q})$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall\widetilde{k}\in\mathbb{Z}^{p-1}\times\Lambda\quad \det\|\exp(\mu_q(\widetilde{k})t_j)\|_{j,q=1}^n\ne0.\quad (4)$$

Теорема 2. *Нехай справджується умова (4),* $f(t,x) \in C([0,T]; E^{\gamma_1}_{\vec{\alpha},2\vec{b}}(Q))$ *,* $\vec{\alpha} = 2\vec{b}n + n(n-1)(\vec{e}+2\vec{b})/2 + \vec{\varepsilon}$*,* $\gamma_1 = nC_3T - \delta(2t_1 + t_2 + \ldots + t_n)$ *,* $\varphi_j(x) \in E^{\gamma_2}_{\vec{\alpha},2\vec{b}}(Q)$ *,* $\gamma_2 = nC_3T - \delta(t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-1})$ *,* $j = 1,\ldots,n$ *. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$ *) векторів* $\vec{t} = (t_1,\ldots t_n) \in [0,T]^n$ *існує єдиний розв'язок задачі (1)-(3) з простору* $C^{(n,2\vec{b}n)}(\overline{Q})$ *, який неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_j(x)$ *,* $j = 1,\ldots,n$*.*

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Іван С. Тупкало

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

e-mail: iohannis@rambler.ru

Одним із ефективних методів побудови точних аналітичних розв'язків задач математичної фізики є метод інтегральних перетворень. Широкий клас операторів формально можна подати у вигляді

$$B = J^{-1}_{\sigma\to x}[A(t,x,\sigma)\cdot J_{x\to\sigma}],$$

де J – деяке інтегральне перетворення, $A(t,x,\sigma)$ – функція (символ) оператора B, яка задовольняє певні умови; якщо $A = A(\sigma)$, то символ називається сталим.

На теперішній час найбільш повно досліджено випадок, коли $J = F$, де F – перетворення Фур'є. До вказаного класу належать оператори диференціювання, дробового диференціювання та інтегрування, інтегральні оператори типу згортки та інші.

Нехай $J = F_B$ – перетворення Бесселя [1].

Розглядається задача Коші для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Bu(t,x), \quad (t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(t,x)|_{t=\tau} = \varphi(x), \tag{2}$$

де φ – обмежена, неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, оператор B побудований за змінним символом $A(t,x,\sigma)$, який є аналітичною функцією аргумента σ.

Доведено розв'язність задачі (1), (2) у вказаному класі початкових функцій. Знайдено зображення розв'язку у вигляді інтеграла Пуассона

$$u(t,x) = \int_0^\infty Z(t,0;x,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi, \quad \nu > -\frac{1}{2},$$

де Z – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (1), який будується за допомогою модифікованого методу Леві.

1. Городецький В.В., Мартинюк О.В., *Оператори Бесселя нескінченного порядку та їх застосування*, Доп. НАН України, 2003, **6**, 7-12.

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНА КРАЙОВА ЗАДАЧА НА ГРАФІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Володимир М. Флюд [1,2], **Юрій Д. Головатий** [1]
[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна*
[2] *Опольська політехніка, Ополе, Польща*
e-mail: yu_holovaty@franko.lviv.ua, flyud@yahoo.com

Досліджено мішану задачу на зірковому графі Γ для гіперболічного рівняння з малим додатним параметром ε при старшій просторовій похідній. Граф Γ можна трактувати як модель пучка струн, скріплених в одній точці, а задача моделює коливання такої системи у випадку, коли коефіцієнти жорсткості струн є досить малими. Нехай $V=\{a,a_1,\dots,a_n\}$ – множина вершин, а $E=\{(a,a_1),\dots,(a,a_n)\}$ – множина ребер. Тоді $\Gamma=\Gamma(V,E)$ – зірковий граф з n променями. Вважатимемо, що всі його ребра $\gamma_k=(a,a_k)$, які з'єднують центр a зірки з вершинами a_k $(k=\overline{1,n})$, є відрізками. Кожне ребро γ_k запараметризуємо змінною $x_k\in[0,L_k]$, де значення параметра $x_k=0$ відповідає вершині a, а L_k – довжина ребра. Літерою x без індексів надалі позначатимемо довільну точку на графі Γ. Через Q позначатимемо декартів добуток $\Gamma\times(0,T)$ для деякого додатного T. Нехай $Q_k=\gamma_k\times(0,T)$, $k=1,\dots,n$. Нехай $u^\varepsilon=u(x,t;\varepsilon)$ – функція задана на Q. Позначимо через $u_k^\varepsilon=u_k(x,t;\varepsilon)$ звуження u^ε на область Q_k. Якщо функція $u(x,t;\varepsilon)$ описує відхилення системи струн від стану рівноваги в точці $x\in\Gamma$ в момент часу t, то вона є розв'язком мішаної задачі для гіперболічного рівняння на графі

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}+q(x)u^\varepsilon=f(x,\,t)\quad\text{в}\quad Q, \tag{1}$$

$$u^\varepsilon(x,\,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u^\varepsilon(x,\,0)}{\partial t}=\psi(x)\quad\text{для}\quad x\in\Gamma, \tag{2}$$

$$u^\varepsilon(a_1,\,t)=\mu_1(t),\quad \dots,\quad u^\varepsilon(a_n,\,t)=\mu_n(t)\quad\text{для}\quad t\in(0,T), \tag{3}$$

$$u_1^\varepsilon(a,\,t)=u_2^\varepsilon(a,\,t)=\ldots=u_n^\varepsilon(a,\,t)\quad\text{для}\quad t\in(0,T), \tag{4}$$

$$\frac{\partial u_1^\varepsilon(a,\,t)}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2^\varepsilon(a,\,t)}{\partial x_2}+\dots+\frac{\partial u_n^\varepsilon(a,\,t)}{\partial x_n}=0\quad\text{для}\quad t\in(0,T). \tag{5}$$

Вхідні дані є двічі неперервно диференційовними функціями.

Досліджена задача є сингулярно збуреною і для її вивчення використано метод примежових шарів [1], [2]. Побудовано повне асимптотичне розвинення розв'язку задачі (1)-(5). Досліджено асимптотичну поведінку розв'язку u^ε та доведено асимптотичну коректність.

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром*, Успехи мат. наук, 1957, **12**, №5, 3-125.
2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. *Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений*, М.: Наука, 1973.

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА В НЕОБМЕЖЕНИХ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ ОБЛАСТЯХ

Тоня М. Фратавчан

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

e-mail: b_tonia@mail.ru

Нехай T – задане додатне число, n_1, n_2, n_3 – натуральні числа такі, що $1 \le n_3 \le n_2 \le n_1$; $n \equiv n_1+n_2+n_3$; $M_i \equiv \{1, 2, \ldots, i\}$; $\mathbb{R}^l$ – l-вимірний евклідів простір; x – точка простору $\mathbb{R}^n$; $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$, де $x_l \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in M_3$; $\Pi_m \equiv H_m \times \mathbb{R}^n$, $m \in M_2$, де $H_1 \equiv [0; \infty)$, $H_2 \equiv (-\infty; T]$.

Розглянемо в Π_m, $m \in M_2$, рівняння вигляду

$$Lu(t,x) \equiv \Big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial x_{2j} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial x_{3j} - A(t, \partial x_1)\Big)u(t,x) = f(t,x), \qquad (1)$$

де x_{lj} – координата точки x_l, $l \in M_3$, $j \in M_{n_l}$, $A(t, \partial x_1)$ – диференціальний вираз по x_1 другого порядку, коефіцієнти якого можуть залежати лише від часової змінної t.

Автором було наведене означення Λ_δ^m-умов, які можуть задовольняти рівняння типу (1). Ці умови полягають в тому, що фундаментальні розв'язки Z цих рівнянь визначені в необмежених за часом областях і для них справджуються оцінки, оцінки функції з яких мають відому поведінку при $t \to \infty$.

Як приклад застосування Λ_δ^m-умов до дослідження рівняння (1) в необмежених за часом областях наведемо один із отриманих результатів, позначивши через

$$\|u(t,\cdot)\|^{\overrightarrow{k}(t)} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \Big(|u(t,x)| \exp\Big\{ -\sum_{l=1}^{3} k_l(t) \cdot |\overline{x}_l(t)|^2 \Big\}\Big),$$

де $k_l(t) = \begin{cases} (c_0 a_l)/(c_0 - a_l t^{2l-1}), & 0 \le t \le T; \\ (c_0 a_l)/(c_0 + a_l |t|^{2l-1}), & t < 0, \ l \in M_3, \end{cases}$ $c_0 \in (0, c)$, c – стала з Λ_δ^m-умови, $a_l > 0$ такі, що $T < \min\limits_l \Big(\dfrac{c_0}{a_l}\Big)^{\frac{1}{2l-1}}$; $\overline{x}_l(t) \equiv (\overline{x}_{l1}(t), \ldots, \overline{x}_{ln_l}(t))$, $l \in M_3$; де $\overline{x}_{1j}(t) \equiv x_{1j}$, $j \in M_{n_1}$, $\overline{x}_{2j}(t) \equiv x_{2j} + tx_{1j}$, $j \in M_{n_2}$, $\overline{x}_{3j}(t) \equiv x_{3j} + tx_{2j} + \dfrac{t^2}{2} x_{1j}$, $j \in M_{n_3}$.

Теорема. Нехай рівняння (1) задовольняє Λ_δ^2-умову з $\delta \in \mathbb{R}$, і для розв'язку u цього рівняння виконуються умови:

1) $\forall \{t, t_0\} \subset H_2$, $t_0 < t$: $\|u(t_0,\cdot)\|^{\overrightarrow{k}(t_0)} \to 0$ при $t_0 \to -\infty$;

2) функція $f \equiv Lu$ неперервна та задовольняє умови:

$$\forall\, t \in H_2: \quad \|f(t,\cdot)\|^{\overrightarrow{k}(t)} < \infty, \quad \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\delta(t-\tau)} \|f(\tau,\cdot)\|^{\overrightarrow{k}(\tau)} d\tau < \infty.$$

Тоді для u є правильним зображення $u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi, (t,x) \in \Pi_m$,

та оцінки $\|u(t,\cdot)\|^{\overrightarrow{k}(t)} \le C \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\delta(t-\tau)} \|f(\tau,\cdot)\|^{\overrightarrow{k}(\tau)} d\tau.$

ІСНУВАННЯ 2π-ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

С.Г. Хома-Могильська, Н.Г. Хома, Л.Г. Хохлова
ТНЕУ, ТНПУ,
Тернопіль, Україна
e-mail: nadija_khoma@mail.ru, glnos.kho@gmail.com

Нами показано, що чисельно-аналітичний метод [1] можна використовувати для дослідження нелінійних крайових періодичних задач вигляду

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon F(x,t,u), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$u(x,t+2\pi) = u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

при умові, що для кожної функції $u(x,t) \in Q^-_{2\pi\times 2\pi}$ функція $F(x,t,u(x,t)) \in Q^-_{2\pi\times 2\pi}$, де $Q^-_{2\pi\times 2\pi} = \{u : u(x,t) = -u(-x,t) = u(x+2\pi,t) = u(x,t+2\pi)\}$.

На основі вивчення властивостей внутрішнього інтегралу функції (оператора Даламбера)

$$\widetilde{u}_H(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\, d\xi \tag{1}$$

можна досліджувати існування періодичних розв'язків крайових 2π-періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку.

Нами доведено [2] наступне твердження.

Теорема. *Нехай* $f(x,t) \in C(\mathbb{R}^2) \bigcap Q^-_{2\pi\times 2\pi}$. *Тоді оператор, визначений формулою*

$$(Pf)(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\, d\alpha +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t \Big(\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\, d\xi - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ds \int\limits_{x-t+s}^{x+t-s} f(\xi,s)\, d\xi \Big)\, d\tau \tag{2}$$

при кожній функції $\mu(z) \in C^1(\mathbb{R}) \bigcap Q^-_{2\pi} = \mu : \mu(z) = -\mu(-z) = \mu(z+2\pi)$ *переводить функцію* f *із класу* $Q^-_{2\pi\times 2\pi}$ *в клас* $Q^-_{2\pi\times 2\pi}$, *причому*

$$(Pf)(0,t) = 0, \qquad (Pf)(\pi,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И., *Численно-аналитические методы исследования периодических решений*, К.: Вища шк., 1976.
2. Самойленко А.М., Хома-Могильська С.Г., *Аналітичний метод відшукання* 2π*-періодичних розв'язків гіперболічних рівнянь другого порядку*, Доповіді НАН України, 2010, **4**, 25-29.

КОМПЕНСУЮЧИЙ ОПЕРАТОР ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В НАПІВМАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Ярослав М. Чабанюк, Віктор Р. Кукурба, Уляна Т. Хімка
Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна
e-mail: yaroslav_chab@yahoo.com

Неперервна процедура стохастичної оптимізації у напівмарковському середовищі в схемі серій [1] задається еволюційним рівнянням

$$du^\varepsilon(t) = a(t)\nabla_b C(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon))dt, \quad u^\varepsilon(0) = u, \tag{1}$$

де $\nabla_b C(u,\cdot) := \frac{C(u_i^+,\cdot)-C(u_i^-,\cdot)}{2b(t)}$, ($i = \overline{1,d}$) – псевдоградієнт функції регресії $C(u,x)$, $u \in R^d$, $x \in X$. Напівмарковський процес $x(t)$, $t \geq 0$, задається напівмарковським ядром [2] $Q(x,B,t) = P(x,B)G_x(t)$, де $G_x(t)$ – функція розподілу часу перебування в стані $x \in X$. $\pi(B)$, $B \in \boldsymbol{X}$, є стаціонарним розподілом рівномірно ергодичного супроводжуючого марковського процесу $x_0(t)$, $t \geq 0$, у вимірному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$, що задається генератором $Q\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$. Тут $q(x) := 1/g(x)$, $g(x) := E\theta_x := \int_0^\infty \overline{G}_x(t)dt$, $\overline{G}_x(t) := 1 - G_x(t)$ з стаціонарним розподілом $\pi(B)$, $B \in \boldsymbol{X}$, проектором Π [2] та потенціалом R_0.

Введемо розширений процес марковського відновлення (ПМВ)

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \quad x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), \quad \tau_n^\varepsilon = \varepsilon\tau_n, \quad n \geq 0, \tag{2}$$

де $\tau_n := \sum_{k=1}^n \theta_k$, $n \geq 0$, $\tau_0 = 0$, є моментами відновлення НМП $x(t)$, $t \geq 0$.

Розглянемо також сім'ю неоднорідних напівгруп $\boldsymbol{C}_s^t(x)$, $0 \leq t \leq s$, $x \in X$, що породжується процедурою

$$du_x(t) = a(t)\nabla_b C(u_x(t), x), \quad x \in X.$$

Тобто, на тест-функціях $\varphi(u) \in B(R^d)$ має місце зображення $\boldsymbol{C}_s^t(x)\varphi(u) = \varphi(u_x(s))$, $u_x(t) = u$, з породжуючим оператором

$$\boldsymbol{C}_t(x)\varphi(u) = a(t)\boldsymbol{C}(x)\varphi(u), \quad \boldsymbol{C}(x)\varphi(u) := C(u,x)\varphi'(u).$$

Лема. Компенсуючий оператор $\mathbf{L}_t^\varepsilon$ розширеного ПМВ (2) на функціях $\varphi(u,x) \in C^2(R^d)$ допускає аналітичне зображення:

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}Q\varphi(u,x) + q(x)\mathbf{C}_t(x)\theta_1^\varepsilon(t,x)\mathbf{P}\varphi(u,x),$$

де $\theta_1^\varepsilon(t,x) = \int_0^\infty \overline{G}_x(s)\mathbf{C}_{t+s\varepsilon}^t(x)b_1(t,\varepsilon s)ds$, $b_1(t,\varepsilon s) := a(t+\varepsilon s)/a(t) \leq 1$, $\mathbf{P}\varphi(x) := \int_X P(x,dy)\varphi(y)$.

1. Чабанюк Я.М., Хімка У.Т. *Генератор нормованої процедури стохастичної оптимізації в схемі усереднення*, Тези доп. Міжн. конф. до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди (8-13 червня 2009), Чернівці, 2009, 194-196.
2. Korolyuk V.S., Limnius N. *Stochastic Systems in Merging Phase Space*, World Scientific, 2005.

ПРО ХАРАКТЕР ПОВЕДІНКИ РОЗВ'ЯЗКУ УЗАГАЛЬНЕНОЇ НОРМАЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ БІЛЯ МЕЖІ ОБЛАСТІ

Оксана Ю. Чмир

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, Львів, Україна

e-mail: o_chmyr@yahoo.com

Нехай $n \in \mathbb{N}$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $S = \partial\Omega$ класу C^∞, $0 < T < +\infty$, $Q = \Omega \times (0,T]$, $\Sigma = S \times (0,T]$; p, $b \in \mathbb{N}$, $m \stackrel{\text{def}}{=} bp$; $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ – мультиіндекс, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1,n}$, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}$; вектор-функція $F \in [X]^p$, якщо $F_i \in X$, $i = \overline{1,p}$; $A(x,t,D_x) = \sum\limits_{|\alpha| \le 2b} a_\alpha(x,t) D^\alpha$, $a_\alpha(x,t)$ – квадратні порядку p матриці з нескінченно диференційовними на $\overline{Q}$ елементами; I_p – одинична матриця порядку p; $L(x,t,D_x,\frac{\partial}{\partial t}) \equiv (I_p \frac{\partial}{\partial t} - A(x,t,D_x))$ – параболічний диференціальний оператор; $b_{j\,\alpha}(x,t)$ ($j = \overline{1,m}$, $|\alpha| \le r_j$) – матриці-рядки довжини p з нескінченно диференційовними на $\overline{\Sigma}$ елементами, де $0 \le r_m \le ... \le r_1 \le 2b-1$. Припускаємо, що система крайових диференціальних виразів $B_j(x,t,D_x) = \sum\limits_{|\alpha| \le r_j} b_{j\,\alpha}(x,t) D^\alpha$, $j = \overline{1,m}$, є нормальною на Σ і задовольняє умову Лопатинського. Використовуватимемо такі функціональні простори: $D(\overline{\Sigma}) = C^\infty(\overline{\Sigma})$, $D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$; $D^0(\overline{\Sigma}) = \{\varphi \in D(\overline{\Sigma}): \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k}\,|_{t=T} = 0,\ k = 0,1,\ldots\}$, $D_0(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}) : B_j \varphi\,|_S = 0, j = \overline{1,m}\}$. Штрихами позначатимемо простори лінійних неперервних функціоналів на відповідних функціональних просторах, а під $s(F)$ розумітимемо максимальний із порядків сингулярностей компонент узагальненої вектор-функції F.

Нехай $l \in \mathbb{N}$, $l \le 2b-1$, а $M(l)$ – кількість мультиіндексів α таких, що $|\alpha| \le l$. Позначимо через $\partial_l u = (u, u_{x_1}, ..., D^\alpha u, ...)$, $|\alpha| \le l$ матрицю розмірності $p \times M(l)$, компонентами якої є компоненти вектор-функції u та їх похідні за просторовими змінними до порядку l, а $\mathbb{M}_{p \times M(l)}$ – простір матриць розмірності $p \times M(l)$.

Нехай $F_0(x,t,z)$, $(z = (z_{(0,...,0)}, z_{(1,0,...,0)}, ..., z_\alpha, ...))$, визначена в $Q \times \mathbb{M}_{p \times M(l)}$ вектор-функція зі значеннями в $\mathbb{R}^p$, $F_j \in (D^0(\overline{\Sigma}))'$, $F_{m+1} \in [(D_0(\overline{\Omega}))']^p$ і такі, що $0 \le s(F_j) \le q_j$, $1 \le j \le m$, $0 \le s(F_{m+1}) \le q_{m+1}$.

Розглянемо узагальнену нормальну крайову задачу для квазілінійної параболічної системи

$$L\left(x,t,D_x,\frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) = F_0(x,t,\partial_l u(x,t)), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$B_j(x,t,D_x) u(x,t)\,|_\Sigma = F_j(x,t), \quad j = \overline{1,m}, \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = F_{m+1}(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

де u – шукана вектор-функція (матриця-стовпець висоти p).

За допомогою принципу Шаудера встановлено достатні умови розв'язності та характер поведінки розв'язку задачі (1)-(3) у певному ваговому L^1-просторі.

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ІМПУЛЬСНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТИПУ "INTERFACE CONDITIONS" ДЛЯ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Сергій М. Чуйко, Олексій С. Чуйко, Антон С. Чуйко
Слов'янський державний педагогічний університет,
Слов'янськ, Україна
e-mail: chujko-slav@inbox.ru

Досліджено T-періодичну задачу для системи з зосередженим запізненням [1]

$$dz/dt = A(t)z(t) + B(t)z(t-\Delta) + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad i = \overline{1,p}, \quad A(t), B(t), f(t) \in C[0,T] \quad (1)$$

та імпульсним впливом типу "interface conditions" [2]

$$\ell_i z(\cdot) = a_i, \quad \ell_i z(\cdot) := \sum_{j=0}^{i} \ell_i^{(j)} z(\cdot), \quad a_i \in \mathbb{R}^k, \quad z(t) \in C^1\Big\{[0,T] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}, \qquad (2)$$

визначеним за допомогою лінійних обмежених векторних функціоналів

$$\ell_i^{(0)} z(\cdot) : C[0,\tau_1[\to \mathbb{R}^k, \quad \ldots, \quad \ell_i^{(i)} z(\cdot) : C[\tau_i, \tau_{i+1}[\to \mathbb{R}^k, \quad i = \overline{1, p-1},$$

$$\ell_p^{(0)} z(\cdot) : C[0,\tau_1[\to \mathbb{R}^k, \quad \ldots, \quad \ell_p^{(p)} z(\cdot) : C[\tau_p, T] \to \mathbb{R}^k.$$

Припустимо, що однорідна частина системи (1) має нетривіальний T-періодичний розв'язок $z_0(t, c_r) = X_0(t)c_r$, $c_r \in \mathbb{R}^r$; $X_0(t) \in C[0,T]$, $\mathbb{R}^{n\times r}$.

Лема. *Позначимо* $Q_i := -\ell_i^{(i)} X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{k\times r}$, $i = 1, 2, \ldots, p$. *За умов*

$$P_{Q_1^*}\ell_1^{(0)} X_0(\cdot) = 0, \quad P_{Q_2^*}\Big\{\ell_2^{(0)} X_0(\cdot) + \ell_2^{(1)} X_0(\cdot) Y_1\Big\} = 0, \quad \ldots, \quad P_{Q_p^*}\sum_{j=0}^{p-1} \ell_p^{(j)} X_0(\cdot) Y_j = 0$$

існує принаймні один T*-періодичний розв'язок* $z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r$, $c_r \in \mathbb{R}^r$, *однорідної частини задачі (1), (2), де* $Q_i^+ -$ *псевдообернені за Муром-Пенроузом матриці,*

$$X_r(t) = \begin{cases} X_0(t), & & t \in [0; \tau_1[, \\ X_0(t)Y_1, & Y_1 = Q_1^+ \ell_1^{(0)} X_0(\cdot), & t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ X_0(t)Y_p, & Y_p = Q_p^+ \sum\limits_{j=1}^{p-1} \ell_p^{(j)} X_0(\cdot) Y_j, & t \in [\tau_p; T]. \end{cases}$$

Отримано умови існування T-періодичних розв'язків неоднорідної задачі (1), (2), які узагальнюють відповідні результати зі статті [2] на випадок систем із зосередженим запізненням.

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, Utrecht-Boston: VSP, 2004.
2. Чуйко С.М. *Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием*, Дифференц. уравнения, 2001, **37**, № 8, 1132-1135.

НЕОДНОРІДНІ ДИФУЗІЙНІ ПРОЦЕСИ НА ПІВПРЯМІЙ, ПОРОДЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКОМ ПАРАБОЛІЧНОЇ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ІНТЕГРАЛЬНИМ ЧЛЕНОМ У КРАЙОВІЙ УМОВІ

Роман В. Шевчук

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

e-mail: romkoshev@gmail.com

Нехай $D = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$, $\partial D = \{0\}$ – межа області D, $\overline{D} = D \cup \partial D$ – замикання D і T – деяке додатне фіксоване число. Припустимо, що в D задано неоднорідний дифузійний процес, який в околі кожної точки $x \in D$ визначається диференціальним оператором другого порядку A_s, $s \in [0, T]$, що діє на множині всіх двічі неперервно диференційовних та обмежених разом зі своїми похідними функцій:

$$A_s f(x) = \frac{1}{2} b(s,x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + a(s,x) \frac{df(x)}{dx},$$

де дифузійні характеристики $a(s,x)$ і $b(s,x)$ обмежені та неперервні для $(s,x) \in [0,T] \times \overline{D}$, до того ж $b(s,x) > 0$. Припустимо також, що на ∂D задано крайовий інтегро-диференціальний оператор L_s типу Феллера-Вентцеля ([1]), за допомогою якого визначається крайова умова, що описує поведінку дифузійного процесу після його виходу на межу області D.

Розглядається задача: побудувати мультиплікативну сім'ю операторів T_{st}, $0 \le s < t \le T$, які описують марковський процес на $\overline{D}$, такий, що в точках D він збігається з процесом дифузії, керованим оператором A_s, а його поведінка в точці $x = 0$ визначається крайовою умовою $L_s f(0) = 0$. Розв'язання цієї задачі при деяких додаткових припущеннях щодо її вхідних даних вперше отримано нами аналітичними методами з використанням класичної теорії потенціалу.

1. Вентцель А.Д., *Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка*, Докл. АН СССР. Математика, 1956, **111**, №2, 269-272.

Author Index

Наукове видання

ТЕЗИ КОНФЕРЕНЦІЇ

ТРЕТЯ МІЖНАРОДНА КОНФЕРЕНЦІЯ

молодих математиків

з диференціальних рівнянь та їхніх застосувань,

присвячена Ярославові Лопатинському

3 – 6 листопада, 2010, Львів, Україна